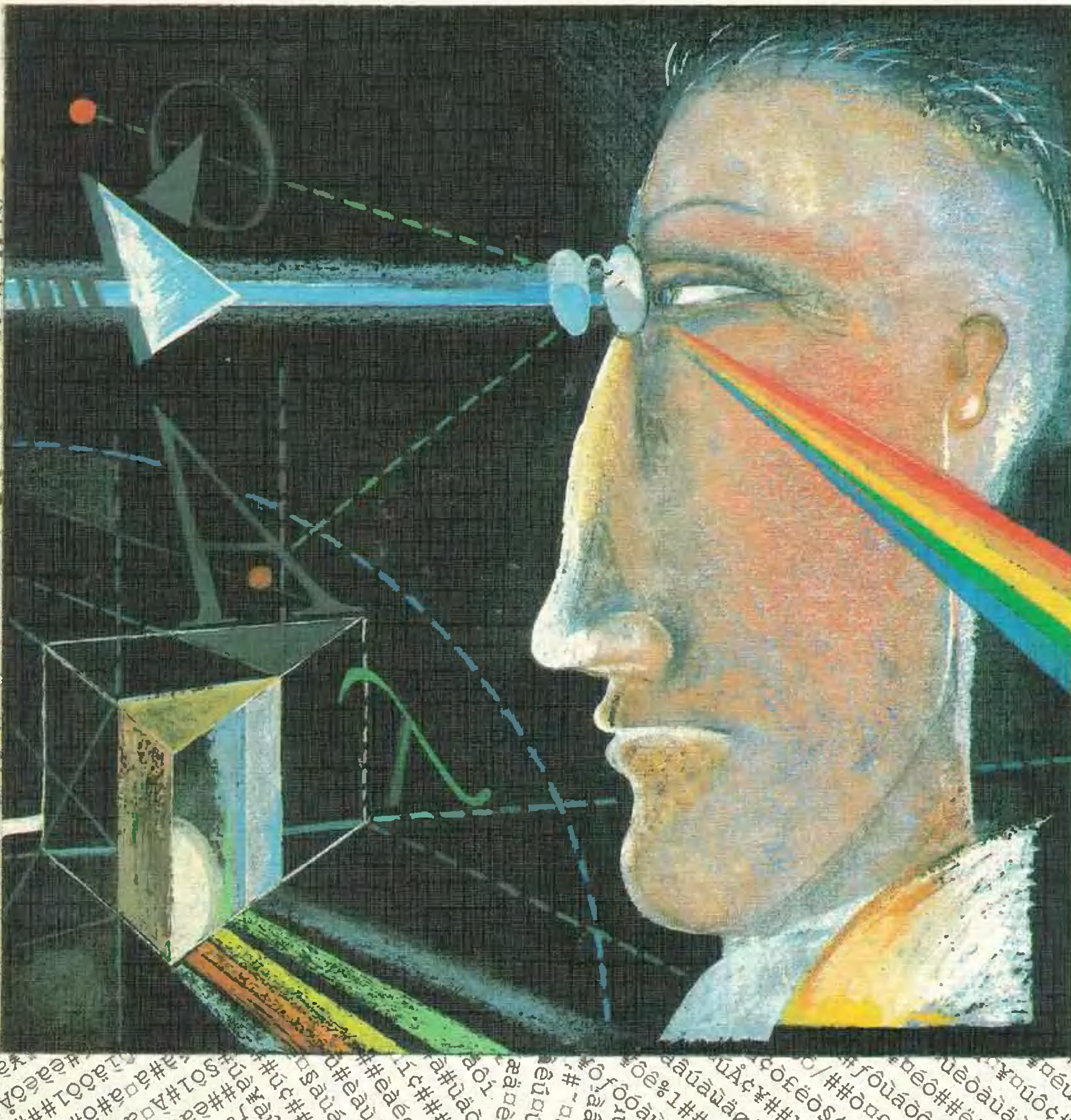
ISSN 0130-2221
ИЮЛЬ/АВГУСТ
1997 · №4

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ИЮЛЬ/АВГУСТ · 1997 · №4

Бюро Квантум

В номере:

Эта статья посвящается памяти прекрасного человека Ли Янкера (1941—1994). Он был одним из лучших учителей математики в США. Познакомившись с фракталами, Ли Янкер стал горячим энтузиастом распространения основ этой науки среди американских учителей. Он считал, что эта тема способна зажечь учителя математики математикой. А учитель, увлеченный своим предметом, способен на многое... В 1992— 1993 годах он организовал для учителей десятки превосходных конференций о фракталах с участием лучших специалистов и популяризаторов. Среди них были и «отец» фракталов Б.Мандельброт, и авторы недавно вышедшей у нас в переводе книги «Красота фракталов», и другие. Их мастерски построенные лекции, сопровождавшиеся демонстрацией удивительных компьютерных фильмов, представляли собой настоящее зрелище. В конце таких лекций потрясенные учителя устраивали овацию... Ли Янкера знали и любили американские учителя математики. Когда стало известно о его тяжелом недуге, Ли получил от них около 2 тысяч открыток с пожеланиями выздоровления... Однако через год, в октябре 1994 года, его не стало.

Игра «Хаос» и фракталы

Н.ДОЛБИЛИН

Новое — хорошо забытое старое

Наука о фракталах, о которых пойдет здесь речь, оформилась в отдельную область математики совсем недавно, где-то в конце 60-х — начале 70-х годов нашего столетия. Отцом этого направления называют математика Бенуа Мандельброта. Однако первые фракталы появились в математике намного раньше, более 100 лет тому назад. К их числу относятся такие удивительные конструкции, как *канторово совершенное множество* (1883), или, например, заметающая целый квадрат *кривая Пеано* (1890), или *ковер Серпинского* (1916), или ажурнейшие *множества Жюлиа* (1918). Эти и другие аналогичные конструкции были в свое время открыты математиками для того, чтобы показать, насколько наивными и хрупкими могут быть наши представления даже о столь знакомых, казалось, объектах, как функция и кривая. Эти, как правило, сложные конструкции производили очень сильное впечатление на математиков своей необычностью, за что были прозваны *математическими монстрами*. По-видимому, первосоздатели этих монстров не всегда могли представить воочию всего изящества их творений. Вряд ли, например, Жюлиа мог испытывать наслаждение от ажурности множеств, носящих сегодня его имя (рис. 1). Визуализация этих сложных объектов стала возможной лишь благодаря компьютеру.

Кстати, так называемая *кривая дракона*, которой была посвящена интересная статья в одном из первых выпусков журнала «Квант» более четверти века назад, также является типичным фракталом, хотя термина «фрактал» в то время еще не было.

Так что же такое фрактал? Общепринятого определения этого понятия не существует. Однако любое из предлагаемых определений фрактала, например определение фрактала по Мандельброту — «множество, хаусдорфова размерность которого превышает его топологическую размерность», — вряд ли сможет удовлетворить читателя. Представить по нему, что такое фрактал, невозможно. Это тот случай, когда, по нашему мнению, нужно начинать знакомство с

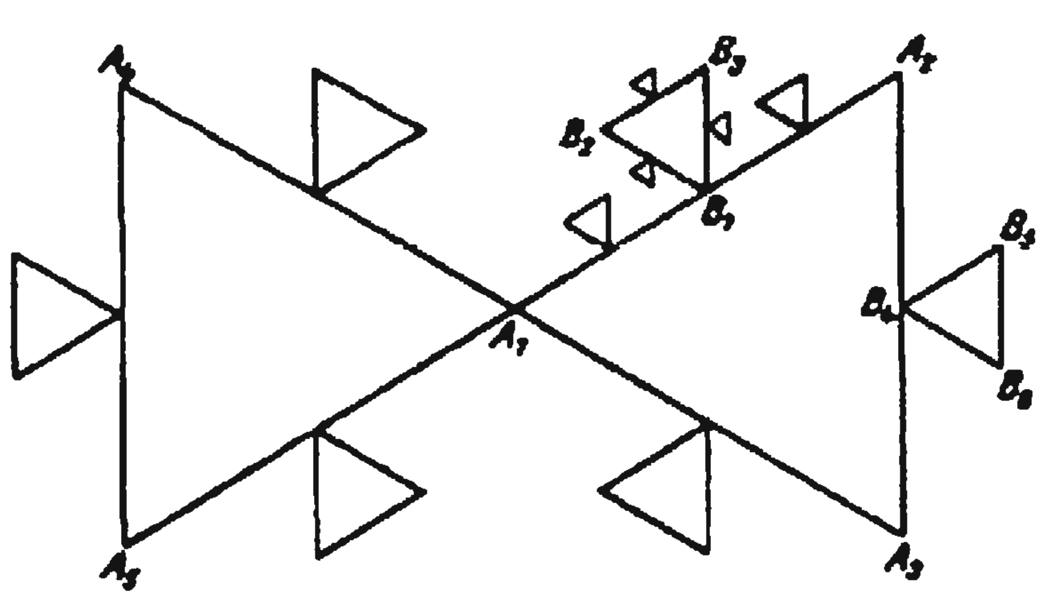


Рис. 1. Слева — докомпьютерная «визуализация» множества Жюлиа (1925 г.); справа — множество Жюлиа, нарисованное компьютером

понятием не с его определения, а с рассмотрения конкретных примеров. Позднее, после приобретения определенного опыта, можно вернуться к определению.

Геометрия — язык природы

Было бы неверно сводить термин «фрактал» к наименованию лишь разновидности математических монстров, которые представляют интерес, пожалуй, только для узкого круга математиков. Б.Мандельброт в книге «Фрактальная геометрия природы» проводит любопытную мысль: евклидова геометрия, которая изучается в школе, сама по себе плохо предназначена для описания форм природных объектов.

В самом деле, нельзя не согласиться с тем, что не так уж много объектов природного происхождения имеют простые формы многоугольника или многогранника, круга или шара, цилиндра или конуса. В силу более-менее понятных причин «повезло» шару (например, форма планет, звезд, ягод и многого другого). Форма конуса имеется у действующих вулканов. Многогранные формы встречаются, пожалуй, только у кристаллов. Если же говорить об объектах искусственного происхождения (здания, мебель, утварь, посуда...), то они, наоборот, как правило, имеют простые геометрические формы — прямоугольник и параллелепипед, круг и шар и т.п., или их несложные композиции, — т.е. те самые формы, которые изучаются в элементарной геометрии.

Мандельброт отмечает, что некоторые из природных форм обладают геометрическим свойством, которое присуще и упомянутым ранее математическим монстрам. Это так называемое свойство *самоподобия* состоит в том, что структура, которую имеет объект на «макроуровне», повторяется в нем и на «микроуровне». Подобный эффект можно наблюдать, если рассматривать кочан цветной капусты «издали» и «вблизи» (рис.2). Мы видим, что один и тот же характер поверхности повторяется на двух различных уровнях рассмотрения. На рисунке 3 представлена имитация береговой линии, сделанная компьютером. Она очень похожа на фотографию морского побережья, сделанную как бы с высоты околоземной орбиты, затем с высоты полета самолета, с высоты птичьего полета... Мы видим как бы различные порции ландшафта в разных масштабах. Но каждый раз бросается в глаза схожесть очертаний на всех этих картинках: Такого рода самоподобие встречается у многих природных форм. Это несколько неожиданно, однако самоподобие может возникать там, где его совершенно не ждут, в чем мы убедимся на примере игры «Хаос».

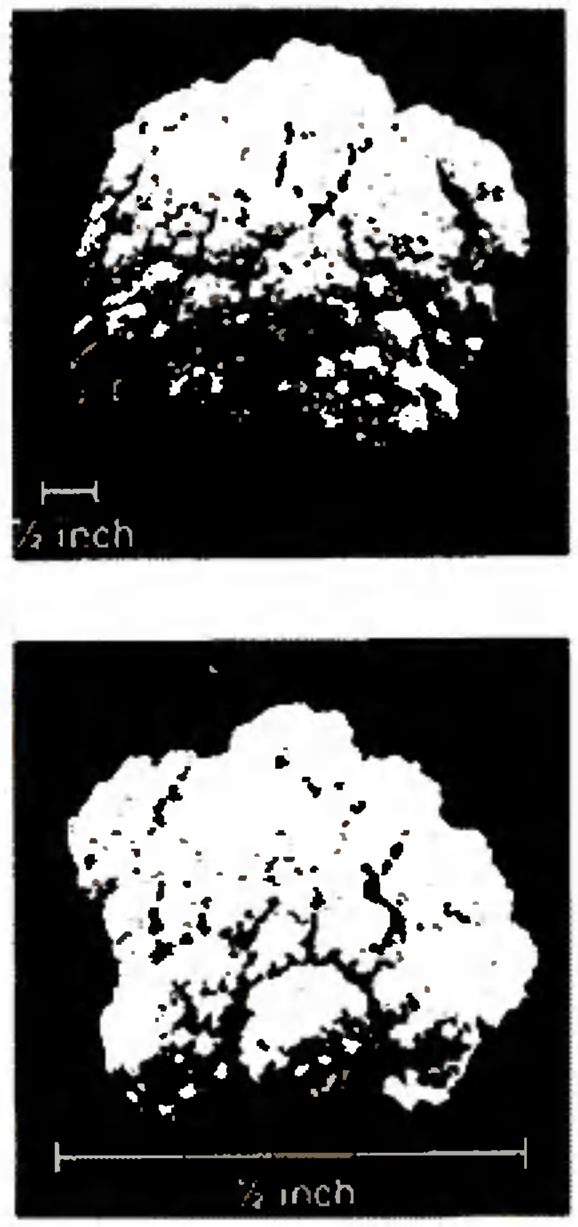


Рис. 2

Случайность оборачивается ... порядком

Игра под названием «Хаос» имеет много вариантов. Рассмотрим один из них. Возьмем на плоскости треугольник A_0, A_1, A_2 и «монету» с *тремя* «сторонами» для случайного выбрасывания одного из трех чисел 0, 1 или 2. Таким датчиком случайных чисел может служить «кость» — кубик с числами 1, 2, ..., 6 на гранях. Тогда остаток выпавшего числа по модулю 3 будет равен 0, 1 или 2.

Итак, начинаем игру. Отметим совершенно *произвольную* начальную точку x_0.

Шаг 1-й. Бросим кость; предположим, выпало число с остатком 0. Соединим тогда точку x_0 с вершиной A_0 треугольника $A_0A_1A_2$ отрезком. Отметим середину отрезка $[x_0, A_0]$ — точку x_1 (рис.4).

Шаг 2-й. Бросим опять кость; допустим, выпало 2. Отметим середину отрезка $[x_1, A_2]$ и обозначим ее через x_2. Нетрудно догадаться, какой шаг будет следующим.

Шаг n-й. Пусть уже имеется точка x_{n-1} и при n-м бросании кости выпадает число α_n, где $\alpha_n = 0,1$ или 2. Тогда соединим точку x_{n-1} с вершиной A_{α_n}, и n-я точка x_n нашей последовательности, по определению, есть середина отрезка $[x_{n-1}, A_{\alpha_n}]$.

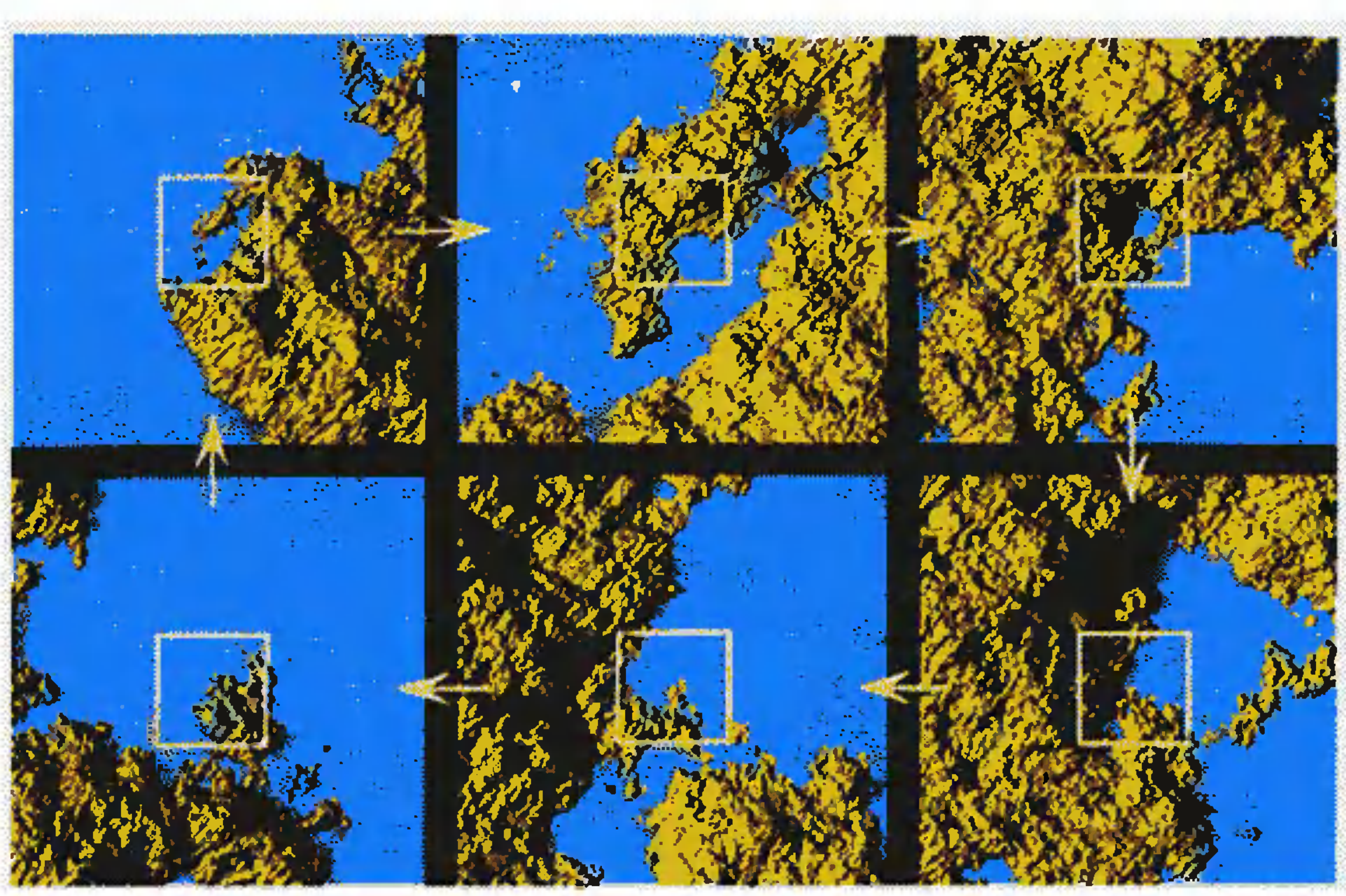


Рис. 3

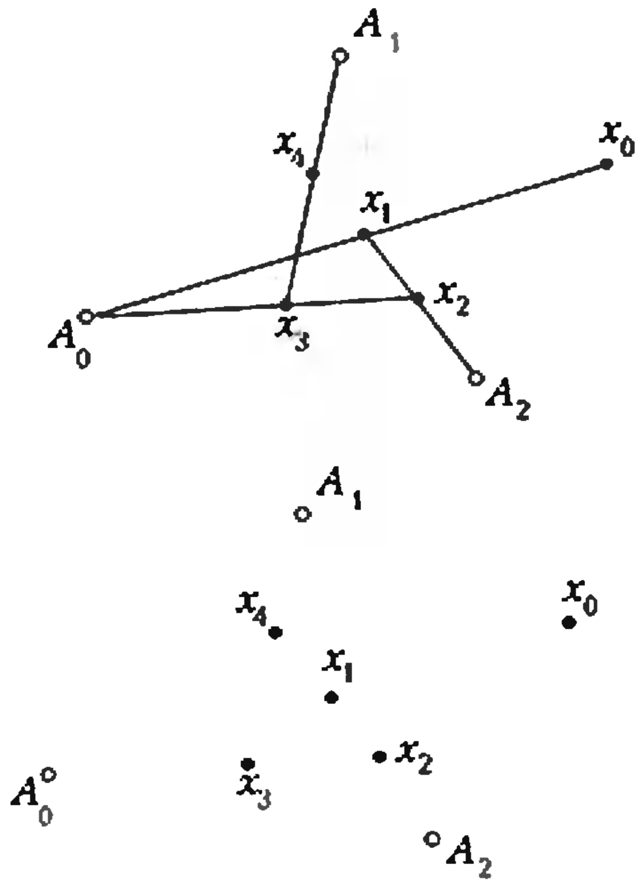


Рис. 4

Действуя таким образом, мы получаем последовательность

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

точек на плоскости. От чего она зависит? Разумеется, последовательность X зависит от выбора начальной точки x_0 и, конечно, от той случайной последовательности

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$$

чисел 0,1,2, которые выдаются нам при бросании кости. Как мы видим, здесь слишком много неопределенности: и начальная точка x_0 взята произвольно, и последовательность вершин совершенно случайна. Так что ожидать чего-то определенного от последовательности X не приходится. Выведем на дисплей компьютера первые, скажем, 100 точек последовательности (рис. 5,*а*). Как и ожидалось, ничего интересного. Чтобы убедиться в том, что действительно ничего особенного здесь не происходит, давайте добавим еще, скажем, точек пятьсот, благо выдаются они «не вручную», а компьютером. Опять, как говорится, не на что глаз положить... Хотя минуточку ... что-то новое проступило на рисунке 5,*б*, на котором показаны результаты игры после 500 шагов! Продолжим игру и выведем на дисплей 2000 точек (рис. 5,*в*)... Тот узор, который на рисунке 5,*б* только-только начал проявляться, на рисунке 5,*в* стал гораздо отчетливее. Рисунок 5,*г*, на котором отмечены уже 10000 точек, ничего нового, кроме дополнительной контрастности, не добавляет к рисунку 5,*в*. Последовательность рисунков 5,*а*—*г* напоминает фотографию в процессе проявления, когда сначала проступают какие-то размытые пятна, потом выступают вполне узнаваемые формы, которые в конце концов доводятся до необходимой контрастности.

Фигура на рисунке 5,*г* напоминает геометрическую конструкцию под названием *салфетка Серпинского*.[1] То, что в результате совершенно *случайного* процесса появился столь симметричный узор, — это абсолютно неожиданно. Однако чувствуется, что произошло это совершенно **неслучайно**. Действительно, можно повторять эксперимент опять и опять, беря каждый раз новые начальные точки x_0. Случайные последовательности чисел $\mathcal{A}$ будут, понятно, также разными. Однако при выводе точек последовательности X на дисплей результат будет неизменным: салфетка Серпинского.

Не правда ли, удивительно: последовательности точек X **разные**, случайные, а их «фотографии» выглядят совершенно **одинаково**. Второй, не менее интересный вопрос: как вообще случайность может порождать строгий порядок, присущий салфетке Серпинского? Задача статьи — объяснить этот феномен.

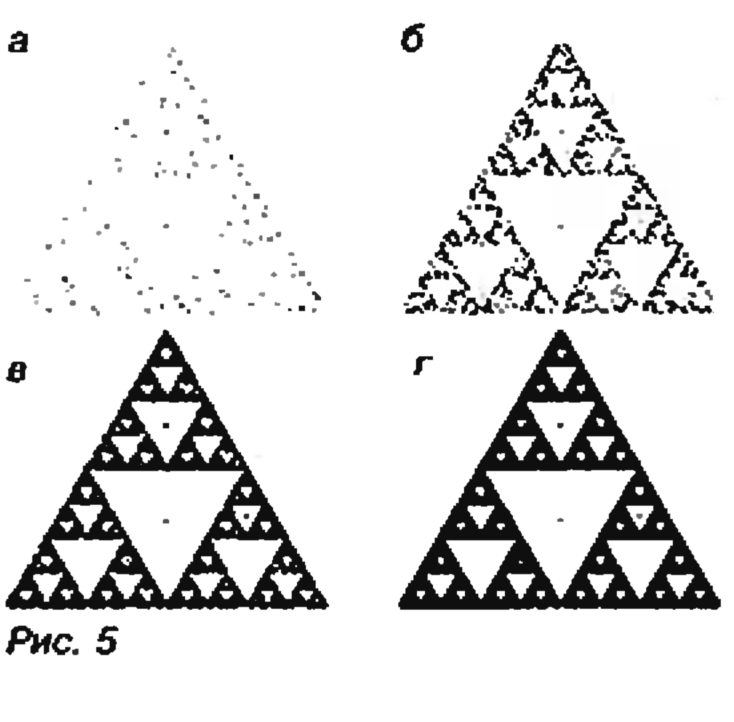


Рис. 5

Салфетка Серпинского — что это такое

Определяется салфетка Серпинского T_C при помощи следующей бесконечной процедуры. Возьмем треугольник $A_0A_1A_2$, состоящий из всех его внутренних и граничных точек (рис. 6,*а*), и на *первом этапе* разделим его тремя средними линиями на четыре треугольника, о которых будем говорить, что это треугольники *ранга 1*. Удалим внутренность *центрального* треугольника ранга 1 (рис. 6,*б*). Остаются три треугольника, каждый — вместе с его границей. Они попарно пересекаются между собой, всякий раз по вершине. Обозначим эти треугольники (напомним, ранга 1) через T_0^1, T_1^1 и T_2^1. Верхний индекс означает номер этапа построения, нижний — номер вершины, к которой данный треугольник прилегает.

На *втором этапе* возьмем каждый треугольник T_i^1 ранга 1 и разделим его средними линиями на четыре треугольника, которые назовем *треугольниками ранга 2*. Внутренность центрального треугольника опять выбрасывается, а оставшиеся три замкнутых треугольника обозначаются через T_{ij}^2. Первый нижний индекс i наследуется от треугольника ранга 1, в котором находится данный треугольник ранга 2. Второй индекс j означает, какой из трех треугольников ранга 2, на которые подразбивается i-й треугольник T_i^1 ранга 1, имеется в виду. Числа i и j могут принимать значения 0, 1 или 2. Заметим, что если остающихся треугольников ранга 1 было 3, то остающихся треугольников ранга 2 — уже 9 (рис.6,*в*).

На следующем, *третьем*, этапе берется T_{ij}^2 ранга 2, делится на четыре треугольника, которые объявляются треугольниками ранга 3. Как и прежде, внутренность центрального выбрасывается и оставшиеся три треугольника обозначаются через T_{ijk}^3, где индекс k равен 0,1 или 2 (рис.6,*г*).

Салфетка Серпинского T_C — это множество тех точек исходного треугольника $A_0A_1A_2$, которые не принад-

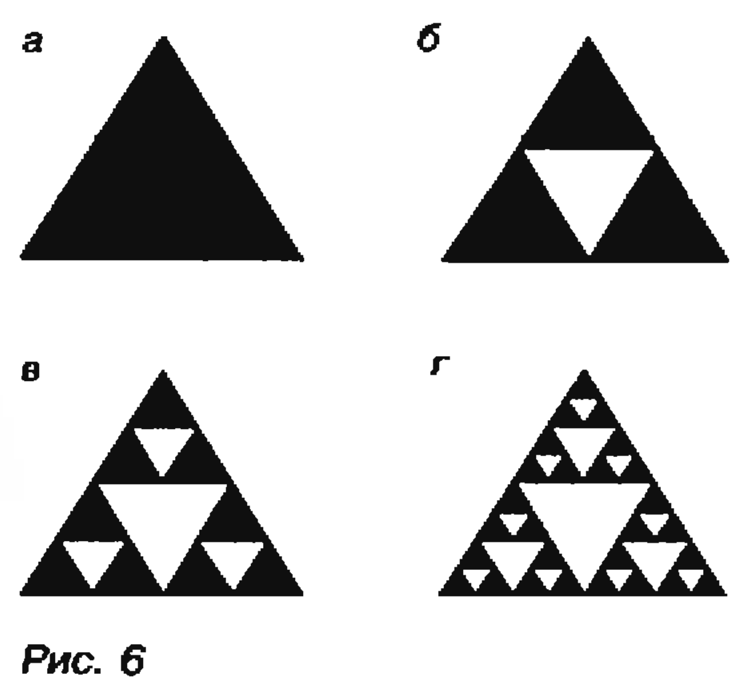


Рис. 6

[1] *В математике хорошо известна конструкция под названием* ковер *Серпинского. Салфетка и ковер Серпинского определяются совершенно аналогично, разница только в том, что салфетка строится на основе треугольника, а ковер — на основе квадрата.*

лежат ни одному из центральных треугольников произвольного ранга, т.е. множество, состоящее из тех точек, которые не удаляются ни на каком из этих этапов.

«Площадь» салфетки Серпинского равна *нулю*. В действительности, о площади салфетки Серпинского говорить в том смысле, в каком говорят в школе о площадях элементарных фигур, нельзя: она слишком «дырява» для того, чтобы иметь площадь в смысле школьного определения.

С другой стороны, если площадь исходного треугольника $A_0A_1A_2$ равна 1, а на первом шаге из него выбрасывается *один* центральный треугольник ранга 1 площади 1/4, то площадь остатка 3/4. На втором этапе из каждого оставшегося треугольника ранга 1 выбрасывается центральный треугольник. Это значит, что площадь остающейся после второго этапа части составляет опять 3/4 площади того, что оставалось после первого этапа. Легко видеть, что после каждого следующего шага остается 3/4 площади той фигуры, которая возникла на предыдущем. Т.е. после n-го шага площадь оставшейся части равна $(3/4)^n$. И когда мы говорим, что «площадь» салфетки Серпинского равна нулю, мы понимаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую фигуру, что, с одной стороны, ее площадь не превосходит ε, а с другой стороны, эта фигура содержит салфетку.

Из каких точек состоит салфетка Серпинского? Легко понять, например, что любая точка, лежащая на границе треугольника *любого* ранга, принадлежит салфетке. Действительно, такая точка не принадлежит внутренности *ни одного центрального* треугольника *никакого* ранга, и следовательно, не выбрасывается ни на каком этапе. Т.е. граница треугольника любого ранга целиком входит в салфетку. Но это далеко не все точки, входящие в салфетку. Как же описать все вообще точки из T_C?

Точки салфетки Серпинского и их адреса

Пусть x — какая-то точка из T_C. По построению салфетки Серпинского, точка x обязана принадлежать хотя бы одному из треугольников ранга 1. Пусть номер этого треугольника есть a_1. Находясь в треугольнике $T^1_{a_1}$, точка x принадлежит хотя бы одному из треугольников ранга 2 (максимум двум), скажем треугольнику $T^2_{a_1a_2}$. На этом пути получаем, что точка x принадлежит бесконечной последовательности треугольников, каждый из которых содержится в предыдущем

$$T^1_{a_1} \supset T^2_{a_1a_2} \supset T^3_{a_1a_2a_3} \supset \ldots \supset T^n_{a_1a_2a_3\ldots a_n} \supset \ldots \qquad (1)$$

Точка x, в силу выбора треугольников, принадлежит *каждому* треугольнику последовательности (1).

Бесконечная последовательность

$$a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots \qquad (2)$$

называется *адресом* $адр(x)$ точки x. Итак, *каждой* точке x салфетки Серпинского можно поставить в соответствие ее адрес $адр(x)$, который является бесконечной последовательностью чисел 0, 1 или 2 (рис. 7).

Здесь возникает три вопроса. *Первый* — а не имеет ли тот же адрес, что и точка $x \in T_C$, какая-либо еще точка салфетки Серпинского? Другими словами, могут ли различные точки салфетки x и y иметь одинаковый адрес: $адр(x) = адр(y)$? Ответ: нет, по данному адресу «проживает» максимум одна точка салфетки.

Далее, последовательность (2) строилась как последовательность индексов треугольников, сходящихся к данной точке $x \in T_C$. Теперь возьмем произвольную последовательность $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, состоящую из чисел 0, 1 или 2. *Второй* вопрос: есть ли в T_C точка с таким адресом? Ответ: да, есть.

И наконец, *третий* вопрос: не может ли точка x иметь более одного адреса? Ответ здесь не совсем однозначный. Как правило, точки из салфетки Серпинского имеют единственный адрес. Но это правило «подтверждается» исключением: некоторые точки в салфетке имеют два (не более) адреса.

Ответ на первый вопрос имеет простое объяснение. Совпадение адресов у точек, скажем x и x', означает, что точки x и x' обе принадлежат каждому треугольнику последовательности (1). Но так как размеры треугольников уменьшаются на каждом этапе вдвое, то расстояние $|x, x'|$ не может быть отличным от нуля. Следовательно, $x = x'$.

Сложнее установить, почему последовательность (1) вложенных друг в друга замкнутых треугольников содержит хотя бы одну общую точку. В начале курса математического анализа имеется важная лемма о вложенных отрезках.

Лемма о вложенных отрезках. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — последовательность *замкнутых* отрезков таких, что

1) каждый следующий отрезок δ_{i+1} содержится в предыдущем отрезке δ_i,

2) длины $|\delta_i|$ отрезков стремятся к 0,

то *существует* и *только одна* точка, которая принадлежит одновременно *всем* отрезкам δ_n.

Из леммы о вложенных отрезках можно вывести аналогичную лемму о вложенных треугольниках.

Последовательность (1) *замкнутых* треугольников удовлетворяет следующим условиям:

1) треугольники из (1) последовательно вложены друг в друга и

2) размер треугольника следующего ранга вдвое меньше размера треугольника предыдущего, т.е. размеры треугольников в последовательности (1) стремятся к нулю. По лемме о вложенных треугольниках *существует одна и только одна* точка x, которая принадлежит всем треугольникам последовательности (1).

Так как каждой последовательности $a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$, состоящей из 0, 1 и 2, соответствует однозначно последовательность треугольников вида (1), по лемме о вложенных треугольниках последовательность имеет единственную общую точку x с адресом $адр(x) = a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$

Объясним ответ на третий вопрос. Допустим, точка x_0 *не является вершиной* никакого треугольника ранга n ни при каком значении n. Пусть она принадлежит треугольнику $T^n_{a_1\ldots a_n}$ ранга n. Тогда она принадлежит одному и только одному треугольнику $T^{n+1}_{a_1\ldots a_{n+1}}$ следующего ранга. Таким образом, последовательность $a_1 \ldots a_n \ldots$ определяется однозначно. Если же точка x является вершиной треугольника $T^n_{a_1\ldots a_{n-1}a_n}$ и не являлась вершиной никаких треугольников предыдущих рангов, то она является вершиной еще одного треугольника ранга n $T^n_{a_1\ldots a_{n-1}a'_n}$. Очевидно, что первый адрес точки x имеет вид $a_1 \ldots a_n\ a\ a \ldots$, а второй ее адрес — $a_1 \ldots a'_n\ a'a' \ldots$

Рассмотрим для примера вершину A_0. Она принадлежит салфетке Серпинского, так как она не входит ни в один центральный треугольник и не удаляется ни на каком этапе. Вершина A_0 имеет единственный адрес $адр(A_0) = 000\ldots$ Вершина A_1 имеет адрес $адр(A_1) = 111\ldots$

С другой стороны, середина A_{12} стороны A_1A_2 принадлежит одновременно двум последовательностям вложенных треугольников вида (1)

$$T_1^1 \supset T_{12}^2 \supset T_{122}^3 \supset \ldots$$

и

$$T_2^1 \supset T_{21}^2 \supset T_{211}^3 \supset T_{2111}^4 \supset \ldots$$

и поэтому имеет два различных адреса: 1222... и 2111... (см. рис. 7).

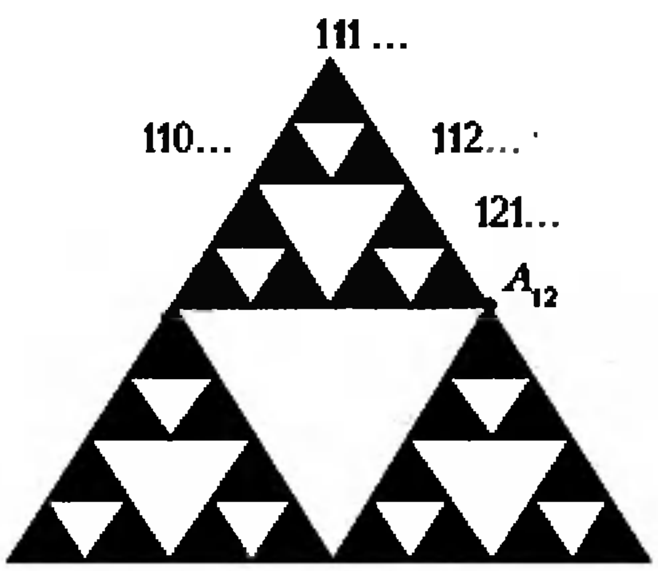


Рис. 7

Неоднозначность адреса, которая встречается у некоторых точек салфетки Серпинского, имеет в точности ту же природу, что и неоднозначность представления в виде десятичной дроби, которое имеется для некоторых действительных чисел. Например, число 0,129999... имеет также и другое представление: 0,13000...

Задачи

1. Покажите, что для i-й вершины треугольника n-го ранга все числа в ее адресе, начиная с $(n+1)$-го знака, равны i: $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = i$.

2. Покажите, что если точка x не является вершиной треугольника ранга n, но лежит на его стороне, параллельной стороне A_iA_j большого треугольника $A_0A_1A_2$ (здесь предполагается, что индексы i и j равны 0, 1 или 2), то все числа в адресе точки x с $(n+1)$-го знака равны i или j.

3. Покажите, что точка x из салфетки Серпинского имеет не более 2 адресов.

4. Докажите, что точка x из салфетки Серпинского с адресом $адр = a_1, a_2, \ldots$ имеет второй адрес тогда и только тогда, когда для некоторого n имеем $a_n \ne a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$ При этом второй адрес этой точки выражается через первый следующим образом:

$$a'_m = a_m,\ \text{если } 1 \le m \le n-1,\ a'_n = a_n \text{ и } a'_{n+1} = a'_{n+2}.$$

Салфетка Серпинского самоподобна

Обозначим часть салфетки Серпинского, которая принадлежит треугольнику T_i^1, через T_i, $i = 0,1,2$ (см. рис.6). Ясно, что

$$T_c = T_0 \cup T_1 \cup T_2.$$

Обозначим через h_i преобразование гомотетии с центром в вершине A_i и коэффициентом гомотетии $1/2$. Возьмем одно из них, скажем h_0, и убедимся в том, что при нем салфетка Серпинского T_C отображается на T_0. Действительно, при гомотетии h_0 треугольник T_i^1 ранга 1 переходит в треугольник T_{0i}^2 ранга 2, и вообще, треугольник $T^n_{a_1\ldots a_n\ldots}$ ранга n переходит при h_0 в треугольник $T^n_{0a_1\ldots a_n\ldots}$ ранга $n+1$.

Пусть точка $x \in T_C$ имеет адрес $a_1a_2\ldots a_n\ldots$ Ей соответствует последовательность вложенных треугольников

$$T_{a_1}^1 \supset T_{a_1a_2}^2 \supset \ldots \supset T_{a_1a_2\ldots a_n}^n \supset \ldots \quad (3)$$

Последовательность (3) при h_0 переходит также в последовательность вложенных друг в друга треугольников:

$$T_0^1 \supset T_{0a_1}^2 \supset T_{0a_1a_2}^3 \ldots \supset T_{0a_1a_2\ldots a_n}^{a+n} \supset \ldots \quad (4)$$

Последовательности (4) соответствует точка $x' = h_0(x)$, которая также принадлежит салфетке. Адрес точки x' есть $0a_1a_2\ldots n\ldots$ Итак, под действием гомотетии h_0 каждая точка x салфетки T_C с адресом $a_1a_2\ldots n\ldots$ переходит в точку салфетки $x' = h_0(x)$ из T_0 с адресом $0a_1a_2\ldots n\ldots$, начинающимся с 0.

Верно и обратное: в любую точку x' салфетки из T_0, т.е. в точку с адресом $0a_1a_2\ldots n\ldots$, начинающимся с 0, переходит точка x со следующим адресом: $a_1a_2\ldots n\ldots$

Таким образом, доказано, что $h_0(T_C) = T_0$. Так как

$$T_C = T_0 \cup T_1 \cup T_2 = \\ = h_0(T_C) \cup h_1(T_C) \cup h_2(T_C),$$

то салфетка Серпинского есть объединение трех гомотетичных ей образов, и в этом смысле она *самоподобна*.

Попутно мы показали, что если точка $x \in T_C$ имеет адрес $адр(x) = a_1a_2a_3\ldots$, то адрес точки $x' = h_0(x) \in T_C$ следующий:

$$адр(h_0(x)) = 0a_1a_2a_3\ldots$$

Предельное множество для игры «Хаос»

Опишем игру «Хаос» при помощи гомотетий h_0, h_1, h_2. Действительно, по начальной точке x_0 и последовательности

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots\}$$

чисел 0, 1, 2 каждую точку последовательности X в игре «Хаос» можно определить как образ предыдущей точки относительно некоторой гомотетии:

$$x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1}).$$

Так как коэффициент каждой гомотетии здесь равен $1/2$, то точка $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ есть середина отрезка $[x_{n-1}, A_{\alpha_n}]$.

Последовательность точек X называют *орбитой* точки x_0. Орбита X определяется, как мы видим, начальной точкой x_0 и последовательностью $\mathcal{A}$ чисел, которая задает последовательность преобразований гомотетии.

Прежде чем понять, почему при выведении на экран орбиты X получается салфетка Серпинского, заметим, что орбита не только не должна совпадать с салфеткой, но иногда вообще может не иметь с ней ни одной общей точки.

Для этого возьмем в качестве начальной точки x_0 какую-нибудь точку внутри центрального треугольника $A_{01}A_{12}A_{23}$ ранга 1, который, как мы знаем, не входит в салфетку Серпинскогом (см. рис. 6, *б*). Тогда точка орбиты $x_1 = h_{\alpha_1}(x_0)$ лежит внутри центрального треугольника ранга 2, который удаляется на втором этапе. Точно так же следующая точка орбиты $x_2 = h_{\alpha_2}(x_1)$ принадлежит центральному треугольнику, который удаляется на третьем этапе, и т.д. Таким образом, если точка x_0 принадлежит удаляемому на каком-то этапе центральному треугольнику, то орбита X не имеет с салфеткой Серпинского **ни одной** (!) общей точки. Но и в этом случае портрет орбиты имитирует салфетку Серпинского.

Объясним ключевую идею этого на простом примере. Возьмем последовательность $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ и выведем первую тысячу ее точек на экран. «Портретом» этой последовательности является... единственная предельная точка 0 для этой последовательности. Точки последовательности, которые расположены «далеко» от предела 0, если присмотреться, тоже можно заметить. Но этих точек, благодаря высокой скорости сходимости последовательности, совсем немного, расположены они изолированно и на общую картину не влияют. (От скорости схождения существенно зависит портрет орбиты. Действительно, возьмем последовательность 1, 0, 999, ..., 0, 999^n, ... Ее предел будет тем же, что и у предыдущей последовательности. Однако сходится она к 0 медленно, и ее портрет будет совершенно другим. Он будет выглядеть как множество точек, распределенное по всему отрезку, постепенно сгущающееся в окрестности нуля.) Мы покажем, что в игре «Хаос» мы получаем орбиту X, «предел» которой есть целое множество точек — салфетка Серпинского. Причем орбита «сходится» к своему «пределу» весьма быстро потому, что коэффициент подобия $\frac{1}{2}$ намного меньше единицы.

Пусть дана орбита $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Точка y называется *предельной* для орбиты X, если для любого положительного ε найдется бесконечно много точек из X, которые лежат в ε-окрестности точки y. Точка y — некоторая точка плоскости, вообще говоря, не принадлежащая орбите. Заметим, что в случае, когда орбита X является сходящейся в известном смысле последовательностью, то ее предел является *единственной* предельной точкой. Но, вообще говоря, орбита X может иметь много предельных точек. Множество *всех* предельных точек y для орбиты X называется *предельным* множеством орбиты X. Обозначим его через $Lim X$.

Возьмем фиксированную последовательность преобразований подобий $\{h_{\alpha_i}\}$, $\alpha_i = 0$, 1 или 2, и рассмотрим «параллельные» орбиты X и X' двух различных начальных точек x_0 и x_0'. Оказывается, эти орбиты, хотя и различны, имеют одно и то же предельное множество:

$$Lim X = Lim X'.$$

Причина этого, на первый взгляд неожиданного, утверждения — в том, что точки параллельных орбит с одинаковыми номерами сближаются при увеличении номера n. Действительно, так как h_i есть гомотетия с коэффициентом $1/2$, то для расстояний между соответствующими точками имеем

$$|x_1, x_1'| = \frac{1}{2}|x_0, x_0'|,$$

$$|x_2, x_2'| = \frac{1}{2}|x_1, x_1'| = \frac{1}{2^2}|x_0, x_0'|, \ldots$$

$$\ldots, |x_n, x_n'| = \frac{1}{2}|x_{n-1}, x_{n-1}'| = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2^n}|x_0, x_0'|. \quad (5)$$

Пусть y — предельная точка для орбиты X. Тогда в любой маленькой окрестности точки y найдется бесконечно много точек из орбиты X: x_{n_1}, $x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ Но так как согласно (5) орбиты сближаются, то в любой маленькой окрестности найдется бесконечно много точек из орбиты X' также. Таким образом, точка y является предельной и для орбиты X'. И обратно, совершенно симметрично, всякая предельная точка для орбиты X' есть предельная точка и для X. Таким образом, $Lim X = Lim X'$.

Универсальные последовательности и салфетка Серпинского

Последовательность $\mathcal{A}$ чисел 0,1 и 2 назовем *универсальной*, если она содержит *любой* конечный набор чисел 0, 1 или 2.

Легко дать примеры НЕуниверсальной последовательности: 000..., 111... или 012012012... Первый пример универсальной последовательности, который приходит в голову, это — последовательность, в которой сначала выписываются все слова из 0, 1 и 2 длины 1, затем все слова из тех же цифр длины 2, за ними все слова длины 3 и т.д.

Это — весьма искусственная последовательность. На первый взгляд кажется, что универсальная последовательность — это относительно редкий объект во множестве всех бесконечных последовательностей. Однако ниже мы объясним, что как раз наоборот, универсальная последовательность — это типичная последовательность, а неуниверсальные последовательности составляют исключение, подобно тому, как периодические десятичные дроби составляют исключение среди всех вообще действительных чисел.

Теперь мы готовы сформулировать теорему, которая является ключом к ответу на наш основной вопрос: почему орбита на «фотографии» выглядит как салфетка Серпинского.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ *— универсальная числовая последовательность и* X *— соответствующая орбита произвольной точки* x_0. *Тогда* $Lim\ X = T_C$.

Идея доказательства теоремы. Как мы уже знаем, для фиксированной последовательности $\mathcal{A} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ предельное множество $Lim\ X$ не зависит от выбора начальной точки. Поэтому в качестве начальной точки можно взять произвольную точку из салфетки Серпинского. По доказанному выше, для точки x из салфетки T_C ее образ $h_{\alpha_i}(x)$ также принадлежит салфетке и его адрес начинается с числа α_i. Поэтому адрес n-й точки орбиты X начинает с $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\alpha_1$.

Возьмем произвольную точку из салфетки y, она имеет адрес $адр(y) = a_1 \ldots a_m \ldots$ Пусть $w = a_m \ldots a_1$ есть слово, состоящее из первых m знаков адреса точки y, взятых в обратном порядке. Так как $\mathcal{A}$ — универсальная последовательность, то $\mathcal{A}$ содержит хотя бы раз (и следовательно, как легко показать, бесконечно много раз) слово w. Возьмем отрезок последовательности $\mathcal{A}$ некоторой длины n, который заканчивается этим словом: $a_1 \ldots a_{n-m} a_m \ldots a_1$. Это означает, что соответствующая точка орбиты $x_n = h_{\alpha_1}(\ldots h_{\alpha_m}(x_{n-m}))$ имеет адрес, начинающийся, как и адрес точки y, с $a_1, \ldots, a_m$. Отсюда следует, что расстояние $|x_n, y| < \frac{1}{2^m}$, где за единицу принята длина стороны исходного треугольника. Так как m может быть сколь угодно большим, то произвольная точка y из салфетки является предельной точкой орбиты X.

Можно показать, что и, обратно, любая предельная точка для орбиты X принадлежит салфетке Серпинского.

Таким образом, из теоремы следует, что в случае *универсальной* последовательности $\mathcal{A}$ каждая точка салфетки Серпинского притягивает к себе неограниченно много точек орбиты. Образующиеся на экране сгущения вокруг точек салфетки создают зрительное восприятие салфетки Серпинского. Точки орбиты, которые отстоят от салфетки, тоже присутствуют на фотографии «достаточно далеко», их тоже можно разглядеть. Но так как они расположены изолированно, то на фоне яркого созвездия под названием «Салфетка Серпинского» они малозаметны и никак не влияют на общую картину.

Типичность универсальной последовательности

Сейчас нам остается объяснить, почему последовательность $\mathcal{A}$, выдаваемая при игре «Хаос», всегда (точнее сказать: «почти всегда») является универсальной. Здесь мы вторгаемся в святая святых теории вероятностей, о которой в школьной математике не говорится ни слова. Поэтому наше объяснение нельзя считать доказательством. Это лишь идеи, на которых можно построить строгое доказательство.

Итак, мы исходим из того, что бросаемая нами кость совершенно симметрична и при каждом бросании шансы выпасть у каждой из трех цифр одинаковы. Поэтому можно предполагать, что все троичные последовательности $\mathcal{A}$ между собой равноправны. Последовательность, состоящая, скажем, из одних n нулей 000...0 имеет шанс выпасть не больше и не меньше, чем, скажем, последовательность из n чисел 012012..., в которой все цифры равномерно перемешаны. Троичных (бесконечных) последовательностей бесконечно много, поэтому каждая такая фиксированная последовательность, в том числе и каждая универсальная последовательность, имеет один и тот же бесконечно ничтожный шанс выпасть в результате бросания кости.

Но нас не интересует *конкретная* универсальная последовательность. Нам нужно выяснить, насколько часто выпадает вообще *какая-то* универсальная последовательность. Покажем, что универсальные последовательности должны выпадать несравнимо чаще, чем остальные.

Чтобы показать это, сопоставим каждой троичной последовательности $\mathcal{A}$ конкретное действительное число

$0 \le \tau \le 1$, которое равно $\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$.

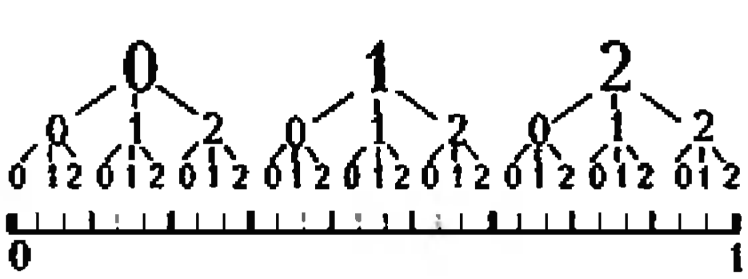


Рис. 8

Указанное соответствие между троичными последовательностями вида $\mathcal{A}$ и действительными числами на отрезке $[0, 1]$ устанавливается точно так, как это делается при разложении действительного числа в десятичную дробь (рис. 8).

Последовательность $\mathcal{A} = (\alpha_n)$ можно рассматривать одновременно как разложение числа τ в «троичную» дробь и как троичный адрес точки τ на отрезке $[0, 1]$.

Поэтому выбор случайной последовательности $\mathcal{A}$ равносилен тому, что мы случайным образом выбираем точку на отрезке $[0, 1]$. Ткнем наугад иголкой в какую-нибудь точку на отрезке $[0, 1]$. Мы будем предполагать, что иголка столь остра, что известный вопрос — сколько чертей сидит на конце иглы — имеет ответ: только один. Вопрос: каков шанс того, что действуя наугад мы попадем в точку, лежащую на отрезке $[0, 1/2]$? Ответ: пятьдесят на пятьдесят — можно считать правильным. Он соответствует духу геометрической вероятности: чем меньше длина отрезка, тем меньше шанс в него попасть.

А каков с этой точки зрения шанс того, что мы попадем в точку x, которая принадлежит отрезку $[1/3, 1]$? Геометрическая вероятность попасть в такую точку равна отношению длины этого отрезка к длине $[0, 1]$, т.е. $2/3$.

Вероятность попадания в точку, принадлежащую хотя бы одному из двух (неперекрывающихся) отрезков, скажем $[4/9, 2/3]$ и $[7/9, 1]$, равна сумме их длин, т.е. $4/9$.

Эти численные примеры взяты не совсем случайно. Отрезок $[1/3, 1]$ содержит все такие точки (и только такие), у которых в их троичном адресе на первом месте стоит не 0. Вторые два отрезка $[4/9, 2/3]$ и $[7/9, 1]$ состоят из точек, в адресе которых 0 отсутствует и на первом и на втором местах. Таким образом, вероятность попадания в точку, которая не содержит 0 на первых двух местах, равна $\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Можно проверить, что вероятность того, что точка x в своем адресе не содержит 0 ни на одном из первых n мест, равна $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Вообще, можно показать следующее.

Задача 5. Для фиксированного троичного слова w_k длины k, рассмотрим множество $M_n(w_k)$ точек, в адресе которых на первых n местах ни разу не содержится слово w_k. Если L_n — сумма длин отрезков, содержащих точки из $M_n(w_k)$, то

$$L_1 = \ldots L_{k-1} = 1$$

и

$$L_n = \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) L_{n-1} \text{ для } n \ge k. \quad (6)$$

Для любого фиксированного k суммарная длина L_n стремится к нулю, если $n \to \infty$. Таким образом, вероятность попадания в точку, адрес которой не содержит хотя бы одну комбинацию фиксированной длины, равна нулю. Таким образом, если бы игра «Хаос» продолжалась неограниченно долго, то в результате получалась бы, как говорят «с вероятностью единица», универсальная последовательность.

На практике же мы имеем дело не с бесконечной последовательностью, а с конечной, состоящей, скажем, из $n = 5000$ чисел. Подсчитаем суммарную длину L_{5000} интервалов, адреса точек которых не содержат на первых 5000 местах хотя бы одного слова длины 5. По формуле (6) суммарная длина равна

$$L_{5000} = \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^{5000-5} \approx 10^{-10}.$$

Таким образом, вероятность того, что на первой тысяче шагов выпадет любое слово длины 5, очень близка к единице. Более того, весьма вероятно, что такое слово выпадет не единожды. Это означает, что среди первых 5000 точек с вероятностью $1-10^{-10} = 0{,}9999999999$ для *любой* точки x из салфетки Серпинского найдется такая точка орбиты, которая будет отстоять от x на расстояние порядка 10^{-3} (длина стороны исходного треугольника $A_0A_1A_2$ принимается за единицу). Даже эти, грубоватые, оценки подтверждают, что орбита X, получающаяся в игре «Хаос», действительно, должна хорошо имитировать салфетку Серпинского.

В заключение отметим, что салфетка Серпинского является *фракталом* в смысле определения Мандельброта, о котором упоминалось выше. Дело в том, что так называемая хаусдорфова размерность салфетки Серпинского есть нецелое число, равное $\frac{\log_3}{\log_2} \approx 1{,}584$ ...(!) Почему?... Это — предмет другой статьи.

Электронный прибой

Л. АШКИНАЗИ

Как он образуется

В электронной лампе электроны пролетают сквозь сетки. Представьте себе электронный поток, пронизывающий две близко расположенные сетки. Пока между сетками нет напряжения, стало быть, в зазоре между ними нет поля, каждый электрон вылетает из зазора с той же скоростью, с которой влетает в него. Когда напряжение между сетками есть, скорость электронов будет увеличиваться, если поле между сетками ускоряющее, и уменьшаться, если тормозящее. Что произойдет, если напряжение изменяется синусоидально? Электроны, пересекающие зазор при ускоряющем поле, будут двигаться быстрее тех, которые пересекали зазор при тормозящем поле. В результате электроны начнут собираться в сгустки, состоящие из электронов, пролетевших зазор раньше, но при тормозящем поле, и пролетевших позже, но при ускоряющем поле. При дальнейшем полете сгустки начнут разваливаться, ибо более быстрые электроны будут выбегать из сгустков вперед, а медленные — отставать.

Поток электронов, вышедший из сеточного зазора, называется модулированным по скорости — скорости разных электронов в нем различны. Поток электронов в области, где образовались сгустки, называется модулированным по плотности — плотность электронов в сгустках большая, а вне малая.

Так образуется электронный прибой — электронные волны, накатывающиеся на берег... Идея, конечно, красивая, но зачем все это нужно? Как и для чего это можно использовать?

Восстанавливая ход мышления ученых и инженеров, не следует изображать его слишком уж логичным. Так что создавая прибор, названный ими «клистрон», — от греческого слова, означающего ударять или окатывать волной, — изобретатели, может быть, и не были строго логичными. В 1939 году братьям Р. и З. Вариан и, независимо, В.Хану и Г.Меткалфу стало интуитивно ясно, что на сетки можно подать и очень малое напряжение, но все равно электроны соберутся в сгустки, лишь бы дать им бежать достаточно долго. Ну а электронные сгустки — это что-то мощное, серьезное, почти осязаемое. Так что вроде бы можно малое напряжение преобразовать во что-то большее. Только во что?

Вот тут от полета интуиции пора переходить к логичности и последовательности.

Как его использовать

Модуляцию скорости мы создали, пропустив электронный поток между двумя сетками. Попробуем использовать ту же систему для отбора энергии от электронных сгустков. А энергии у них может быть много — ведь до того, как подвергнуть поток модуляции по скорости, его можно разогнать высоким напряжением.

Пусть электронные сгустки пролетают через зазор между сетками, в котором имеется тормозящее поле (рис.1, слева). Из зазора электроны выйдут с меньшими энергиями, нежели с которыми они вошли в него. Но куда девалась потерянная ими энергия? (Доля тока, перехватываемая сетками, мала, поэтому в данном случае энергией, идущей на нагрев сеток, можно пренебречь.)

Рассмотрим подробнее поведение тока в цепи электрода, к которому подлетает электронный сгусток. Сейчас мы введем очень важное для техники электровакуумных приборов понятие — «наведенный ток».

По мере подлета сгустка от левого электрода к правому (рис.2) напряженность поля между левым электродом и сгустком убывает, а между сгустком и правым электродом возрастает. Действительно, разности потенциалов между левым электродом и сгустком и между сгустком и правым электродом равны, напряженность же поля будет больше в том зазоре, который меньше. Но раз напряженности поля слева и справа от сгустка изменяются, то изменяются и плотности зарядов на электродах и, следовательно, протекает ток в цепи, соединяющей эти электроды.

Теперь вернемся к рисунку 1 и увидим, что наведенный ток протекает не так, как в батарее, питающей какую-то нагрузку, а так, как в заряжаемом аккумуляторе. Итак, энер-

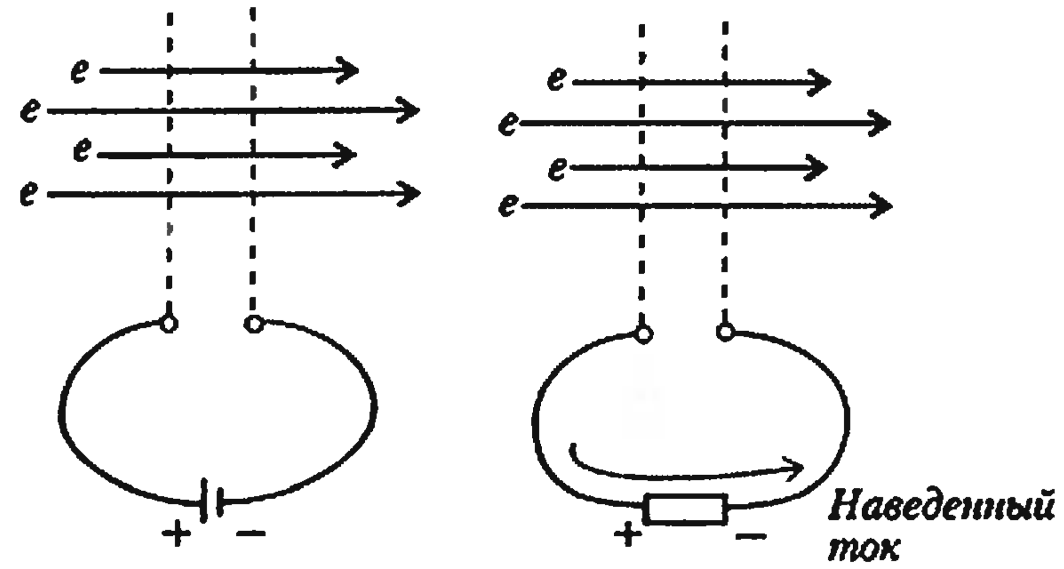


Рис. 1. Электронный поток, тормозящийся в сеточном зазоре. Тормозящее поле создается: слева — источником тока; справа — наведенным током, протекающим через резистор

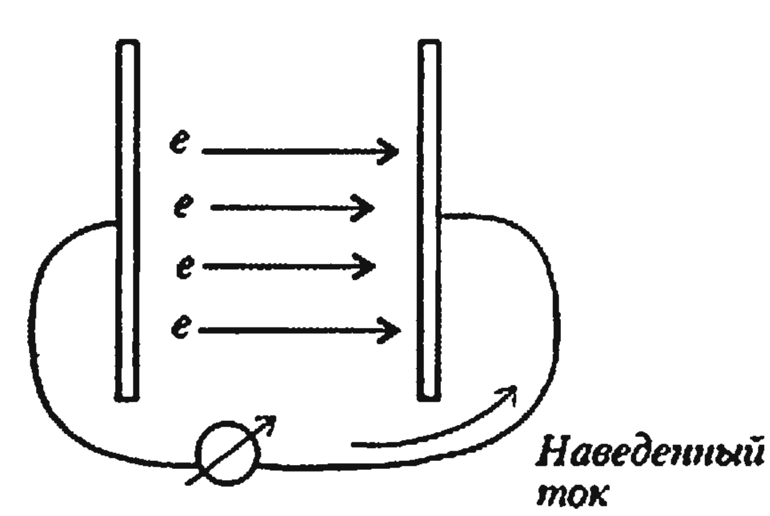


Рис.2. Возникновение наведенного тока

гия, теряемая электронами, может заряжать аккумулятор или использоваться как-либо иначе. Теперь сделаем последний шаг — заменим источник сопротивлением (см. рис. 1, справа). Обратите внимание на полярность напряжения, образующегося на сопротивлении в результате протекания по нему наведенного тока. Полярность такая, «как надо». Пучок будет тормозить сам себя, если сопротивление не равно нулю или бесконечности. Действительно, если полярность напряжения была бы иной, пучок сам собой бы ускорялся. Как тогда быть с законом сохранения энергии? А так все в порядке — энергия, потерянная пучком, поступает в нагрузку и, если это простое сопротивление, переходит в тепло. Конечно, можно поступить и умнее (и сейчас мы узнаем, как). Но сначала подведем кратко итог — с помощью двухсеточного зазора можно создать у электронного пучка модуляцию по скорости, затем она преобразуется в модуляцию по плотности, и с помощью двухсеточного же зазора у такого пучка можно отнять энергию. Это все вместе и есть пролетный клистрон.

Зачем частотам быть сверхвысокими

Представьте себе, что надо передавать информацию с большой скоростью и в вашем распоряжении имеется передатчик, работающий на некоторой частоте f. С какой скоростью можно передавать информацию при наличии такого передатчика? Пусть мы можем управлять передаваемым сигналом, вырезая из него отдельные периоды колебаний (рис.3). Таким способом можно передавать информацию со скоростью f бит/с (1 бит — это один выбор из двух ситуаций: есть полуволна или нет; для передачи буквенного текста надо 5 бит на букву, с помощью 5 бит можно записать 2^5 = 32 символа). Конечно, существует много видов модуляции, и скорости передачи информации с их помощью различны. Но порядок величины будет таким, как мы получили. Оценим теперь, какой частоты сигнал надо иметь, чтобы передать 100 текстов со скоростью нормальной речи или одну телевизионную передачу.

При нормальной речи человек произносит около 20 букв в секунду, т.е. надо передавать порядка 100 бит/с, а для передачи 100 разговоров одновременно достаточно иметь передатчик на частоте 10 кГц. Реально к радиочастотам относят частоты больше 100 кГц (волны короче 3000 м), т.е. любой радиопередатчик при соответствующей модуляции с этой задачей справится. Совсем иная ситуация с телевидением. Изображение содержит около $2\cdot10^5$ элементов. Положим, что нам достаточно 8 градаций яркости. Таким образом, для передачи одного элемента изображения надо иметь 3 бита, а для передачи всего изображения — $6\cdot10^5$ бит. Чтобы глаз не замечал мелькания, изображение должно меняться не реже 20 раз в секунду. Итак, $20\cdot6\cdot10^5$ бит/с$\approx$ $\approx10^7$ бит/с, а частота передатчика должна быть не менее 10^7 Гц = = 10 МГц. Эта частота соответствует длине волны 30 м, т.е. середине коротковолнового диапазона. Реально частота должна быть выше, поэтому телевизионные передачи ведут на частотах метрового диапазона и на еще более коротких волнах. Для передачи информации со все большей и большей скоростью нужны все более и более высокие частоты. Кроме того, высокочастотные электромагнитные колебания используются в радиолокации, для питания ускорителей и для многих других целей, вплоть до готовки в СВЧ-печах.

А не могут ли решать все необходимые задачи обычные электронные лампы?

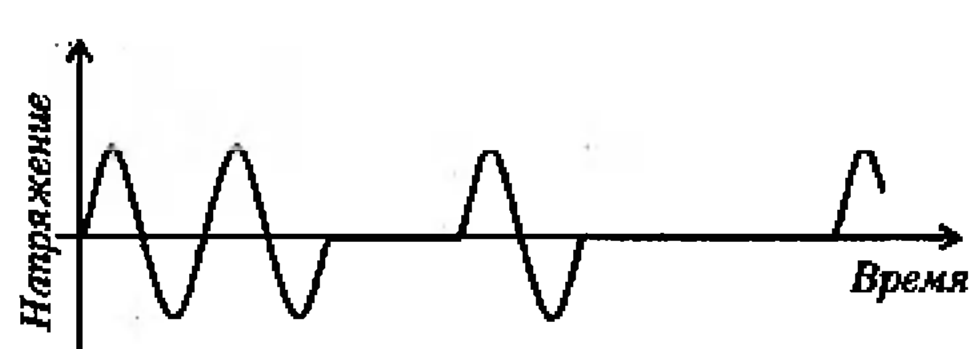


Рис.3. Передача информации с помощью модуляции (пример)

Иллюстрация А.Балдина

Нельзя объять необъятное... с помощью обычной электронной лампы

Возьмем обычную электронную лампу, или, как ее называют, лампу с электростатическим управлением, и начнем понемногу увеличивать частоту сигнала, подаваемого на ее сетку. Как уже рассказывалось, когда время пролета электрона станет сравнимо с периодом переменного напряжения, электрон начнет часть времени пролета ускоряться, а часть... тоже ускоряться, но уже меньшим напряжением. Усиление на таких частотах оказывается меньше. При еще более высоких частотах часть периода электрон летит в тормозящем поле. Наконец, наступает ситуация, когда электрон вообще не будет чувствовать управляющее (сеточное) напряжение — за время его полета от катода до сетки успеет пройти период входного напряжения, а суммарное влияние двух полуволн этого напряжения окажется равным нулю. На какой частоте это произойдет? Пусть напряжение на сетке 1 В, зазор сетка–катод 10 мкм. Тогда время пролета электрона от катода до сетки составит 0,35 нс (формулу $t = d\sqrt{2m/(eU)}$, где t — время полета, d — зазор, m и e — масса и заряд электрона, а U — напряжение, выведите сами), что соответствует частоте примерно 3 ГГц. Это и есть предельная частота, на которой можно заставить работать обычную лампу. Но проблема, связанная со временем пролета электрона от катода до сетки, не единственная.

Время пролета от сетки до анода тоже не равно нулю, и ничего хорошего это за собой не влечет. Поскольку напряжение на сетке изменяется, электроны влетают в зазор сетка–анод с разными скоростями. Такие электроны могут «перепутываться» — влетевшие позже, но с большими скоростями, могут обгонять влетевшие раньше, но с меньшими скоростями. Вам ничего не вспоминается? Это же преобразование скоростной модуляции в модуляцию по плотности! Но лампам прока от этого нет, а в импульсном режиме просто чистый вред — возникает искажение формы импульса.

Наконец, резонансная частота контура возрастает с уменьшением индуктивности и емкости (формула Томсона). Если лампа работает на некоторой частоте, обычно в ее сеточной и анодной цепях применяются контуры, настроенные на эту частоту. Но лампа имеет собственную емкость (между электродами) и собственную индуктивность (вводов). Ни меньше этой емкости, ни меньше этой индуктивности емкость и индуктивность контура сделаны быть не могут.

Итак, вот три проблемы — время пролета катод—сетка, время пролета сетка—анод, емкость/индуктивность лампы. Посмотрим, как решались эти проблемы.

Обратим недостатки в достоинства

Начнем с самого простого. Из формулы для времени пролета электрона от катода до сетки следует, что уменьшить его можно только уменьшением зазора или увеличением напряжения (т.е. увеличением скорости). Уменьшать зазор можно, конечно, не беспредельно. Сделать его меньше 10 мкм очень трудно. Обратимся к напряжению или скорости электрона. Естественно предложение — сначала ускорить электрон и лишь затем подвергать «управлению». Это и сделано в клистроне. Сначала электрон ускоряется относительно высоким напряжением и лишь затем вводится в двухсеточный управляющий зазор.

Время пролета сетка—анод тоже обращено на пользу — именно в это время, как вы уже знаете, скоростная модуляция преобразуется в модуляцию по плотности.

Но что делать с емкостями и индуктивностями? Представим себе контур, настроенный на очень высокую частоту. Конденсатор в нем — две пластины, индуктивность — кусок провода (рис.4). У такого контура есть недостаток — он будет сильно излучать в окружающее пространство. Как с этим бороться? Известно как — экранированием. Прокрутим мысленно провод, соединяющий пластины конденсатора, вокруг вертикальной оси — получим нечто, похожее на тор («бублик»). Вместе с пластинами он образует то, что называется «объемный резонатор». Емкость у него по-прежнему связана с пластинами, а индуктивность — все остальное. Точнее было бы сказать — электрическое поле сосредоточено в зазоре, магнитное — в остальной части.

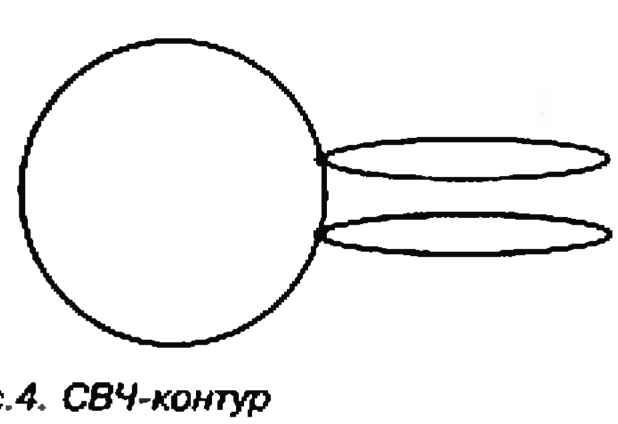


Рис.4. СВЧ-контур

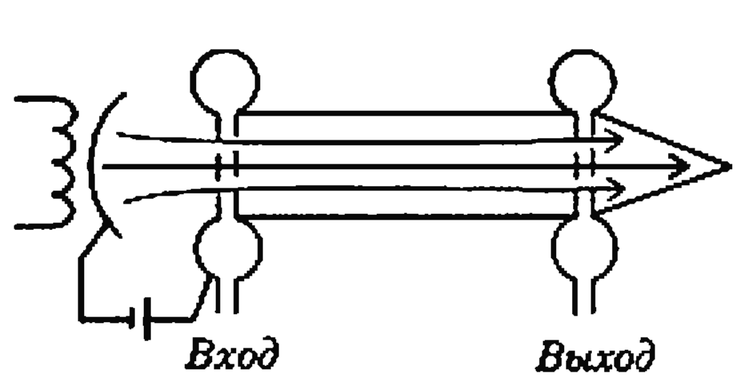


Рис.5. Пролетный клистрон

Конечно, такой резонатор настроить на сколь угодно высокую частоту нельзя. Но все-таки... И главное — как хорошо объемный резонатор сочетается с двухсеточным зазором! Надо только сделать зазор из двух сеток, либо на лампу с двухсеточным зазором надеть снаружи (можно уже вне вакуума) «индуктивную» часть резонатора — «бублик». Для невооруженного глаза он выглядит пустым изнутри. Но мы-то знаем — внутри у него магнитное поле.

Итак, вот он, первый ЭВП СВЧ: катод, (за которым электроны ускоряются), входной зазор, входной резонатор, пролетная труба, выходной зазор, выходной резонатор и, наконец, коллектор-электрод, на который прибудут уже не нужные нам электроны, отдавшие свою энергию в выходном зазоре (рис.5).

Усилитель превращается в генератор

Выведем часть сигнала из выходного резонатора и вернем ее во входной. Если сдвиг фаз в самом клистроне и в цепи обратной связи такой, что часть выходного сигнала, возвращаясь на вход, совпадает по фазе со входным сигналом, усилитель может превратиться в генератор. Для этого еще надо, чтобы часть была не слишком маленькой — чтобы вернувшийся сигнал был больше исходного. Помните, что происходит на сцене, если усиление сигнала микрофона достаточно велико и на него попадает звук от динамиков? О фазе в этом случае заботится не приходится — генерация возбуждается на той частоте, на которой сдвиг фаз во всей цепи составит 2π.

Заметим, что «сигналом» является в некотором смысле и сам электронный поток, точнее — распространяющиеся в нем электронные сгустки. Что если заставить их возвращаться во входной резонатор? Пусть, например, вместо второго резонатора стоит «отражатель» — электрод, на который подано отрицательное напряжение. Сгусток подлетит к нему, развернется и полетит назад, к входному зазору. Проходя через входной зазор, такой сгусток вызовет появление электрического поля. Если фаза этого поля такова, что оно будет усиливать модуляцию электронного потока, прибор начнет генерировать. Изменением напряжения на отражателе можно управлять временем полета сгустка между первым и вторым проходами через резонатор. Чем отрицательное напряжение на отражателе больше, тем на большем расстоянии от себя он остановит сгусток и заставит вернуться его в зазор. Напротив, уменьшением напряжения можно добиться ситуации, когда сгусток вернется не в первый «удачный» момент, а во второй (аналогия с качелями). Впрочем, мощность сигнала, генерируемого прибором — его называют отражательным клистроном, — будет в этом случае меньше. У отражательного клистрона есть одно приятное свойство — частота генерируемых им колебаний меняется при изменении напряжения на отражателе. Естественно — он генерирует на той частоте, на которой выполняется условие совпадения фаз (помните микрофон и динамик на эстраде?). А время полета сгустка и фаза его прибытия зависят, как вы уже знаете, от напряжения на отражателе.

Отражательный клистрон был создан в 1940 году В.Ф.Коваленко и, независимо от него, Н.Д.Девятковым, Е.Н.Данильцевым, И.В.Пискуновым. В течение десятилетий он был основным типом генератора СВЧ-колебаний. Его главным преимуществом перед другими была возможность «электрической перестройки» — управлением частотой путем изменения напряжения. Позже полупроводниковые приборы составили отражательному клистрону весьма серьезную конкуренцию. Однако в диапазоне миллиметровых длин волн ЭВП по-прежнему «дают фору» полупроводникам.

Все придумано. Осталось только сделать

Конечно, это шутка. Проблем в области технологии ЭВП СВЧ оказалось немало. Проще сказать, что там все — проблема. Во-первых, сетки, образующие зазор в резонаторе. Какая-то доля электронов оседает на этих сетках, мигом превращая всю свою кинетическую энергию в тепловую. Сетки делали и тугоплавкие, и с тонкими высокими ребрами (чтобы они лучше передавали тепло на охлаждаемую часть резонатора), но все равно — в мощных приборах сеток как таковых нет. Электронный пучок летит через отверстие — как бы через сетку с одним большим окном. (Рыболовная сеть такого типа позволила бы сохранить нетронутыми богатства всех морей и океанов!)

Следующая проблема — «окно для вывода энергии». Мощные электромагнитные колебания генерируются в вакууме, а нужны они нам снаружи прибора, в воздухе. Казалось бы, особой проблемы нет — любое стекло или керамика прозрачны для электромагнитного излучения и «не прозрачны» для воздуха. Но часть электромагнитного излучения поглощается стеклом или керамикой и нагревает ее. Керамика — материал сам по себе термостойкий, однако при нагреве увеличивается ее проводимость, она начинает сильнее поглощать электромагнитное излучение, еще сильнее нагреваться и так далее. Этот процесс называется тепловым пробоем, а кончается он сквозным проплавленным отверстием, соединяющим вакуумный объем прибора и атмосферу. Дальнейшее в пояснениях не нуждается.

Многие технологические проблемы, как и проблема изготовления сетки, сводятся к выбору материала. Причем ситуация обычно устроена так, что материал, который способен выдерживать более высокие температуры (например, тугоплавкие и прочные при высоких температурах молибден и вольфрам), будет и нагреваться сильнее (например, из-за плохой проводимости и плохой теплопроводности). Чистых металлов в природе не так уж много, но сплавов — не счесть. Вдобавок есть еще композитные материалы — например, смесь (не сплав!) вольфрама и меди, — сочетающие высокие проводимость, теплопроводность и прочность.

Многие ЭВП СВЧ работают в импульсном режиме. Это значит, что электронный поток обрушивается на поверхность коллектора импульсами — скажем, 1 мкс ток идет, а потом 1 мс тока нет. Здесь, на коллекторе, кончается короткая, но яркая биография электрона — в вакууме он ускорялся, тормозился и генерировал, а в металле есть только безликий «электронный газ», там электроны не отличаются друг от друга. Но напоследок электрон делает вот что — отдав остаток энергии на нагрев коллектора, он способствует его разрушению. Действительно, когда ток идет, поверхность коллектора нагревается, в паузе — остывает. При нагреве и охлаждении возникают термические напряжения, в материале коллектора понемногу накапливаются дислокации, потом возникают трещины, и в итоге коллектор начинает разрушаться. Для уменьшения плотности мощности пучка перед коллектором он «распушается», «растаскивается» на большую площадь (см. рис.5).

На уровне хорошего детектива обо всем этом рассказано в прекрасной книге «Теплофизические процессы и электровакуумные приборы», написанной В.Ф.Коваленко и изданной в 1975 году издательством «Советское радио». Много хороших книг написано об электровакуумных приборах, много хороших книг написано о теплофизических процессах, но лучше этой — нет. Конечно, это мое личное мнение, и я его никому не навязываю. Любовь — это всегда личное мнение. И пусть все другие, кто десятилетиями работает в области ЭВП СВЧ, не обижаются. Во-первых, для того чтобы написать хорошую книгу, недостаточно быть прекрасным специалистом. Надо уметь изложить ясно, доступно, интересно, в общем — увлекательно. Нужно иметь свой взгляд на мир и на ЭВП СВЧ. Надо, наконец, просто захотеть написать книгу. И еще надо это сделать. Так же, как и любую работу, — надо захотеть сделать и надо сделать.

Мы остановились на том, что окна перегреваются и разрушаются из-за поглощения в них энергии электромагнитной волны. Казалось бы, созданием диэлектриков с очень малой проводимостью эту задачу можно решить. Увы, дракон оказался многоглавым. Электрон, ударяясь о любой материал, выбивает из него вторичные электроны. Ну и что? Пусть даже шальной электрон ударился в керамическое окно вывода энергии — ну выбьет он сколько-то вторичных электронов, ну разлетятся они куда попало, и все. Увы, не все. Во-первых, выбьет он вторичных электронов довольно много — несколько штук. Во-вторых, раз окно это предназначено для вывода энергии, то, значит, вокруг него и в нем самом всегда есть сильное электромагнитное поле. Поле, заметьте, переменное. Вторичные электроны ускорятся этим полем, наберутся от него энергии, врежутся в керамику, выбьют из нее еще больше вторичных электронов, которые опять ускорятся полем, и пошло-поехало. Электронная лавина нарастает, энергия отнимается от электромагнитной волны и идет на нагрев окна. Такого издевательства — а оно называется высокочастотным вторично-электронным разрядом — не выдерживает самая высокотемпературная керамика.

Много сил и времени было потрачено на поиск материала и конструкции окон, допускающих вывод больших мощностей. Рекорд мощности клистрона 30 МВт (импульсная мощность, при длине импульса несколько мкс) продержался около 20 лет. Но в 1983 году в Стэнфордском университете был разработан клистрон мощностью 50 МВт, а еще через 2 года там же американские и японские специалисты сделали клистрон мощностью 150 МВт. Кроме всего прочего, оказался важным выбор антиэмиссионного покрытия для окна вывода энергии. Ни в одном виде спорта рекорды не бьются таким способом — после 20 лет превышение скачком в 1,7, а потом еще в 3 раза. Впрочем, такое и в технике бывает нечасто.

Палеонтология и Карлсон

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ — замечательная наука. По одному зубу она может восстановить внешний вид динозавра. Давайте и мы попробуем свои силы на этом поприще. Поставим себя на место палеонтологов будущего и постараемся восстановить внешний вид какого-нибудь всем нам хорошо известного существа. Ну например, Карлсона, который живет на крыше.

Ограничимся минимумом заранее известных фактов. Будем считать, что легенды седой старины донесли до нас лишь упоминания о неком живом существе, живущем на крышах домов, перемещающемся в пространстве с помощью воздушного винта и питающемся исключительно малиновым вареньем. В качестве «археологической находки», с которой мы начнем свои построения, возьмем обрывок страницы со словами «я — мужчина в самом расцвете сил».

Итак, начинаем.

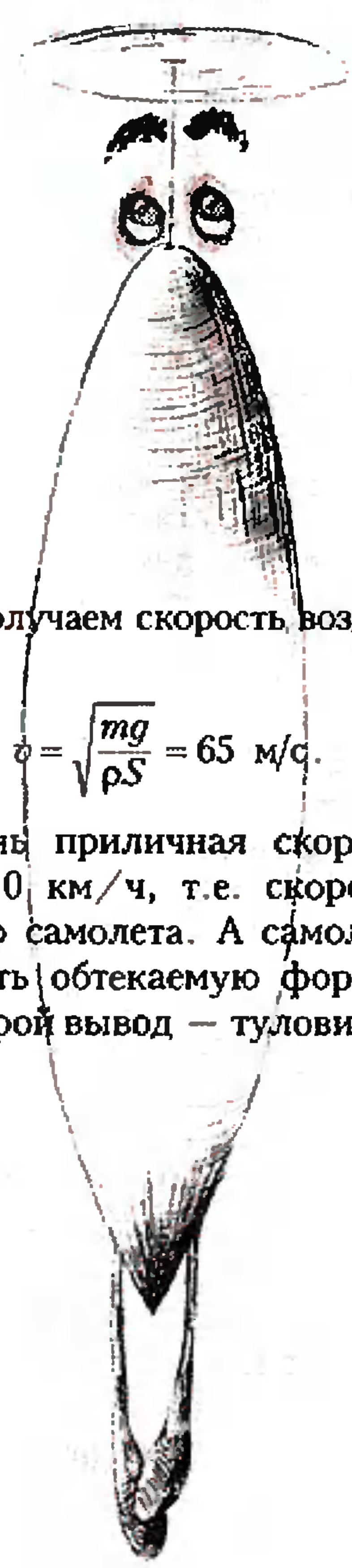
Что же у нас есть? У нас есть уже два числа. Действительно, слова «мужчина в расцвете сил» позволяют оценить массу Карлсона как m = = 70 кг. С другой стороны, способность пролетать в слуховые окна крыш ограничивает размер винта, поэтому оценим радиус винта как R = 0,2 м (рис.1).

Исследуем теперь физические характеристики Карлсона как летательного аппарата. Прежде всего найдем скорость воздушной струи, создаваемой пропеллером. Для оценки ограничимся случаем, когда объект неподвижно висит в воздухе. Рассматривая воздух и Карлсона как единую систему, запишем для них второй закон Ньютона в виде

$$\Delta \vec{p}_{возд} + \Delta \vec{p}_{Карл} = m\vec{g}\Delta t .$$

Изменение пульса неподвижного Карлсона равно нулю, а изменение импульса воздуха составляет $\Delta m v$, где $\Delta m = \rho v S \Delta t$ — масса воздуха, вовлекаемого в движение за время Δt, ρ = 1,3 кг/м^3 — плотность воздуха. Поэтому можем записать

$$\rho v S \Delta t v = mg\Delta t ,$$



откуда получаем скорость воздушного потока:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\rho S}} = 65 \text{ м/с}.$$

Это очень приличная скорость — почти 240 км/ч, т.е. скорость небольшого самолета. А самолет должен иметь обтекаемую форму. Отсюда второй вывод — туловище Карлсона имеет обтекаемую форму и малое лобовое сопротивление (рис.2).

Обсудим затем энергетику Карлсона как тепловой машины. Развиваемую им механическую мощность оценим следующим образом. Ежесекундно им вовлекается в движение масса воздуха $\rho v S$ и ей придается скорость v, следовательно, механическая мощность составляет

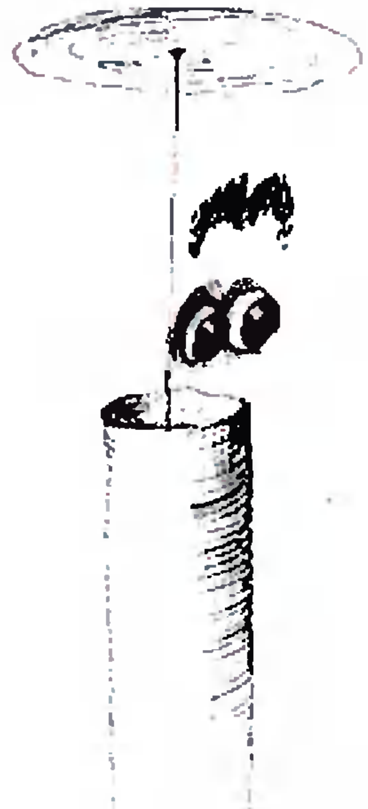
$$P_{м} = \frac{\rho S v^3}{2} = 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 31 \text{ л.с.}$$

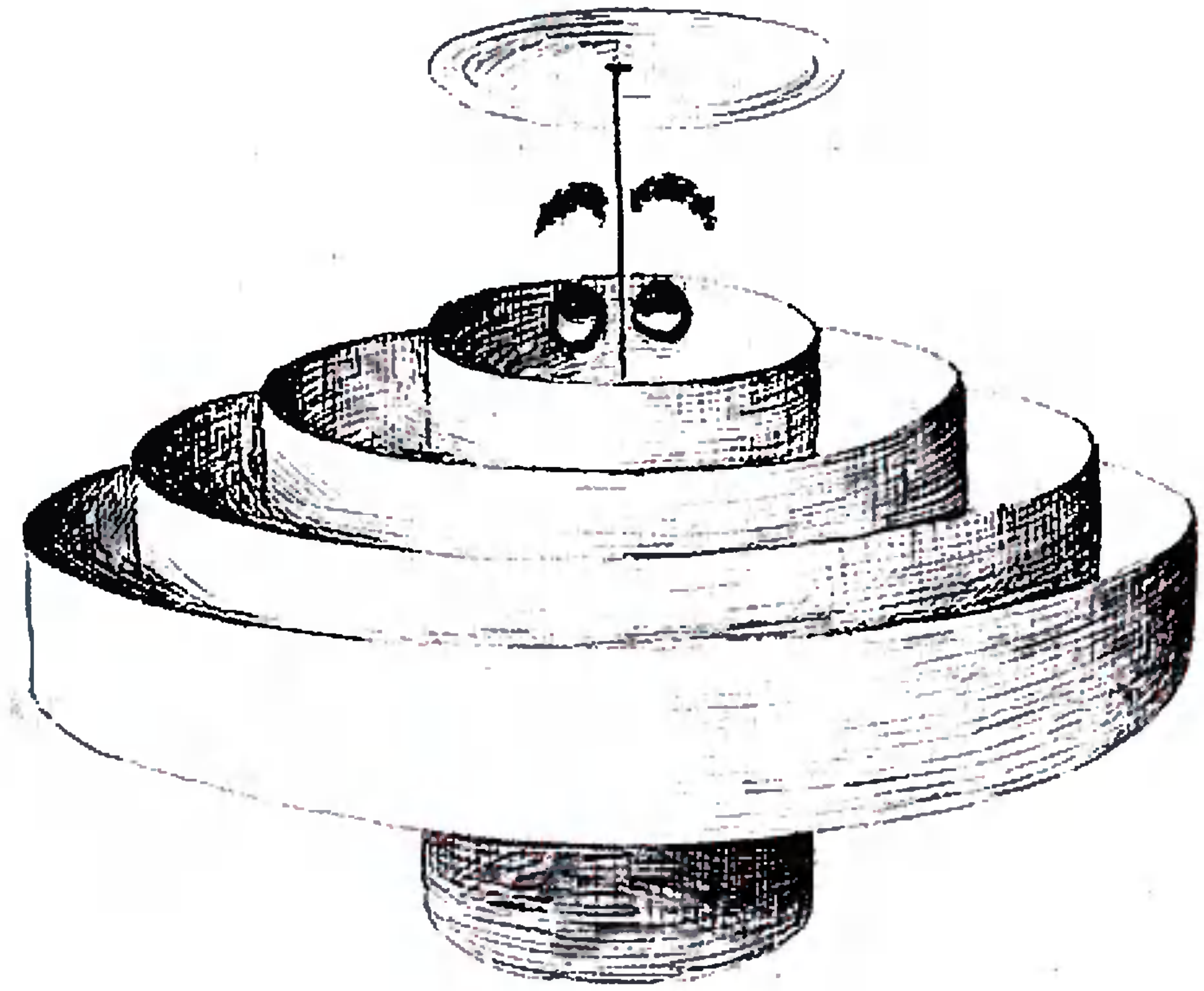
Итак, по развиваемой мощности Карлсон не уступает «Запорожцу». Для оценки полной мощности Карлсона (количества теплоты, выделяющегося в нем в единицу времени за счет «сжигания» пищи) примем его КПД равным 30%. Тогда

$$P_{п} = P_{м}/0{,}3 = 7{,}6 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 100 \text{ л.с.}$$

Это существенно превышает не только сре днюю мощность банковского служащего: 2700 ккал/сут = = 131 Вт, но и мощность металлурга: 3600 ккал/сут = 175 Вт. Поэтому совсем неудивительно, что отголоски об этом удивительном существе дошли до нас через тысячелетия.

Новые уровни мощности — новые схемы систем жизнеобеспечения. На очереди — организация системы дыхания. Вначале один пример. Когда обычный мужчина «в расцвете лет»





взбегает на пятый этаж за 20 секунд, он развивает механическую мощность 700 Вт. При этом частота дыхания у него возрастает до 1 вдоха в секунду, и, с учетом того, что за один вдох он вдыхает 1,5 литра воздуха, потребление воздуха у него составляет 90 л/мин. В пересчете на механическую мощность Карлсона получим, что потребность Карлсона в воздухе равна

$$Q = 50 \text{ л/с} = 3 \text{м}^3\text{/мин}.$$

Обычная система дыхания не годится. Несомненно, в этом случае природа выбрала проточную систему дыхания. Так что Карлсон — это трубка (рис.3). Расчет показывает, что для поддержания необходимого воздухоснабжения внутренний радиус трубки r должен составлять 1,5 см.

Не менее остра для Карлсона и проблема теплоотвода. Ведь тепловая мощность, которую необходимо отводить, равна

$$P_т = P_п - P_м = 5{,}3 \cdot 10^4 \text{ Вт}.$$

Вряд ли Карлсон светился как лампочка, поэтому на отвод тепла в виде излучения рассчитывать не приходится. Остается обычная теплопроводность. А это означает, что Карлсон — тонкостенная трубка с большой боковой поверхностью. Найдем толщину стенок трубки δ и ее длину L. Для этого приравняем тепловую мощность тепловому потоку, идущему за счет теплопроводности из внутренних областей наружу:

$$P_т = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S_\delta,$$

где λ — коэффициент теплопроводности воды (Карлсон, как и все живые существа, должен состоять в основном из воды), ΔT = 24 К — разность внутренней температуры, которая никак не больше 42 °С, и наружной, которую примем равной 18 °С, $\Delta x = \delta/2$, $S_\delta = 2 \cdot 2\pi r L$ — общая площадь внешней и внутренней поверхностей. Это уравнение, совместно с выражением для полной массы Карлсона

$$m = \rho_{воды} \cdot 2\pi r \delta L,$$

дает:

$$\delta = 8{,}3 \text{ мм}, \; L = 30 \text{ м}.$$

Длина великовата. Выход один: Карлсон — это громадный слоистый радиатор (рис.4).

И последняя проблема — питание. Калорийность малинового варенья $q = 3{,}5$ ккал/г, поэтому скорость его потребления равна

$$\frac{P_п}{q} = 5 \text{ г/с} = 300 \text{ г/мин} =$$

$$= 30 \text{ ч.ложек/мин}.$$

Двух рук здесь маловато. А что, если в результате эволюции каждый палец превратился в чайную ложку? Никаким известным законам это не противоречит. Так что последний штрих к образу легендарного Карлсона — рисунок 5.

Наши изыскания в области палеонтологии закончены. И если созданный нами образ, возможно, не очень похож на персонаж Астрид Линдгрен, то давайте учтем, что у сказок свои законы.

Е.Соколов

«Бюро Квантум» планирует возобновить издание книг научно-популярной серии «Библиотечка «Квант», основанной в 1980 году. За десять лет существования этой серии увидели свет около 80 книг. «Библиотечку» хорошо знали и любили и читатели журнала «Квант».

Одной из книг, которые готовятся к выпуску в рамках серии «Библиотечка «Квант», является книга Д.Свиридова и Р.Свиридовой «Кристаллы в океане электромагнитных волн». Авторы — специалисты в области кристаллографии — увлекательно рассказывают об истории создания современных представлений о природе света, о строении кристаллов и их замечательных свойствах, о новейших экспериментальных методах исследования.

Предлагаем вниманию наших читателей два отрывка из книги. Публикацию подготовила Р.Свиридова.

«Кристаллы в океане электромагнитных волн»

(ГЛАВЫ ИЗ КНИГИ)

Д.СВИРИДОВ, Р.СВИРИДОВА

Человек, который увидел кванты

Квантовая теория строения микромира, созданная в двадцатые годы нашего столетия, требовала экспериментальной проверки. Если излучение происходит порциями-квантами, надо попытаться их увидеть. Мысль, казалось бы, фантастическая. Как экспериментально вести исследования, чтобы подтвердить или опровергнуть теорию квантовой прерывности света? Задача кажется неосуществимой. Поверить в такие возможности зрения мог только человек, прекрасно знающий физиологию зрения и физическую оптику.

Самое трудное в постановке новых научных проблем — это переступить порог существующих представлений об определенных взаимосвязях в природе. Вернер Гейзенберг говорил: «Естествоиспытателя интересует прежде всего постановка вопроса и только во вторую очередь — ответ. Постановка вопроса представляется ему ценной, если она оказалась плодотворной в развитии человеческого мышления. Ответы могут иметь в большинстве случаев лишь временное значение; они могут с течением времени, благодаря расширению наших физических сведений, потерять свое значение».

Такая уникальная проблема была поставлена президентом Академии наук СССР академиком Сергеем Ивановичем Вавиловым (1891 – 1951).

В 1920 году С.И.Вавилов, заведующий отделом физической оптики Института биологической физики Наркомздрава, занялся проблемой световых квантов. В своей последней монографии «Микроструктура света», которая обобщала все его работы по изучению природы света, С.И.Вавилов писал: «...свойства света лучше всего выявляются в предельных условиях развития явления или его исследования: при изучении предельно слабых световых потоков, образуемых малым количеством световых квантов, при изучении процессов, протекающих в миллиардные доли секунды, при изучении взаимодействия молекул на предельно малых расстояниях». Именно такой эксперимент был поставлен по наблюдению световых квантов.

В 1729 году французский ученый Пьер Бугер (1698 – 1758) экспериментально установил закон ослабления света при его прохождении через вещество. Любое вещество поглощает пропускаемый через него свет. Обозначим интенсивность света с длиной волны λ, падающего на слой вещества толщиной d, через J_0, а интенсивность света, прошедшего слой, через J. Соответственно закону Бугера,

$$\ln \frac{J}{J_0} = -kd,$$

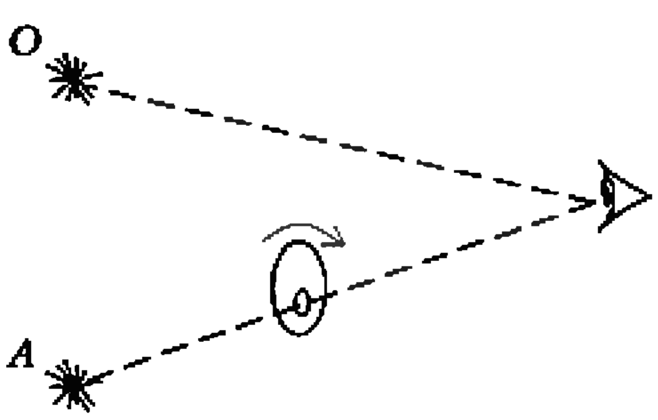
где k — коэффициент поглощения. Этот закон положил начало всем количественным измерениям поглощения света в веществе. С.И.Вавилов говорил: «Пьер Бугер в своей области является такой же замечательной фигурой, как Кеплер или Ньютон.»

Многочисленными опытами было установлено, что коэффициент поглощения не зависит от интенсивности источника. После создания квантовой теории света пытались обнаружить такую зависимость, изменяя интервал интенсивностей световых пучков в 10^{20} раз. Но коэффициент поглощения оставался неизменным. Однако если существует прерывность светового излучения, если существуют кванты, то при предельно малой интенсивности должны наблюдаться флуктуации. Для последовательных малых промежутков времени количество квантов света, поглощаемого веществом, будет разным — закон Бугера должен нарушаться. Необходимо обнаружить эти статистические квантовые колебания.

Много лет «охотники за квантами» (так называли сотрудников Вавилова) осуществляли этот уникальный опыт. Были взлеты и падения, озарения и разочарования. Только в 1941 году опыт был осуществлен.

Может ли глаз зарегистрировать такой микропроцесс? После многолетних исследований было выяснено, что мгновенно глаз в состоянии зрительно почувствовать несколько квантов (пороговое значение — восемь квантов в секунду). Оказалось, наш глаз в определенных условиях является уникальным прибором, который может заглянуть даже в микромир! Как же осуществить это?

В опыте С.И.Вавилова слабо светящееся пятно A малых размеров, яркость которого можно непрерывно ослаблять, регистрируется глазом (см. рисунок). При сильном ослаблении



пятна, когда за секунду в глаз будет попадать немного квантов, должны возникнуть колебания яркости источника. Для наблюдателя источник из постоянного должен превратиться в мигающий. В этом, казалось бы, простом опыте необходимо учитывать несколько фактов, которые необычайно усложняют его осуществление.

Во-первых, очевидно, надо работать с источниками очень малой интенсивности, так как в обычных условиях множество движущихся частиц излучения создают сплошной световой поток.

Во-вторых, необходимо учитывать, что существуют «классические» и квантовые флуктуации света. «Классические» флуктуации, определяемые движением и взаимодействием атомов или молекул источника, связаны с процессами, происходящими внутри источника света. Источник, в котором практически будут отсутствовать такие флуктуации, можно создать. Например, флуоресцирующие молекулы, растворенные в очень вязком веществе, не подверженные возбуждающему или тушащему действию вязкой среды, будут излучать свет непрерывно и постоянно. Квантовые флуктуации при достаточно сильном разрежении должны наблюдаться всегда.

В-третьих, необходима достоверная регистрация глазом этих флуктуаций. Некоторые свойства глаза не позволяют провести эксперимент в таком простом варианте. А именно. Глазное яблоко очень подвижно, поэтому колебания яркости наблюдаются и при больших интенсивностях. Для того чтобы устранить этот недостаток, глаз фиксируют, помещая более яркую (обыкновенно красную) светящуюся точку O в стороне от светящейся точки A. В центре сетчатки получают изображение этой фиксационной точки, а изображение источника A получается в стороне, на постоянном расстоянии от центра.

Кроме того, глаз обладает свойством сохранять зрительное впечатление. Это может приводить к тому, что быстрые колебания интенсивности источника будут сливаться, усредняться и размываться глазом. Для того чтобы устранить этот эффект, между глазом и источником помещают диск с одним отверстием. Диск совершает один оборот в секунду, оставляя источник открытым для глаза только во время прохождения отверстия (например, в течение одной десятой секунды).

Эта необычайно простая установка позволила зарегистрировать необычайно сложное явление. Если число квантов больше порогового значения, каждому прохождению отверстия будет соответствовать вспышка. Если же число квантов уменьшается до порогового значения, не всякому прохождению отверстия будет соответствовать видимая вспышка. При постепенном ослаблении яркости такие колебания интенсивности действительно были зарегистрированы. Чем слабее интенсивность источника, тем больше наблюдается пропусков. Зная число пропусков и вспышек, можно статистически определить среднее число квантов, излучаемое за одну вспышку. Таким образом оказалось действительно возможным «воочию убедиться в квантовой, прерывной структуре света.»

Сейчас существуют тончайшие приборы — фотоумножители и счетчики квантов, но первым увидел квант света невооруженный человеческий глаз.

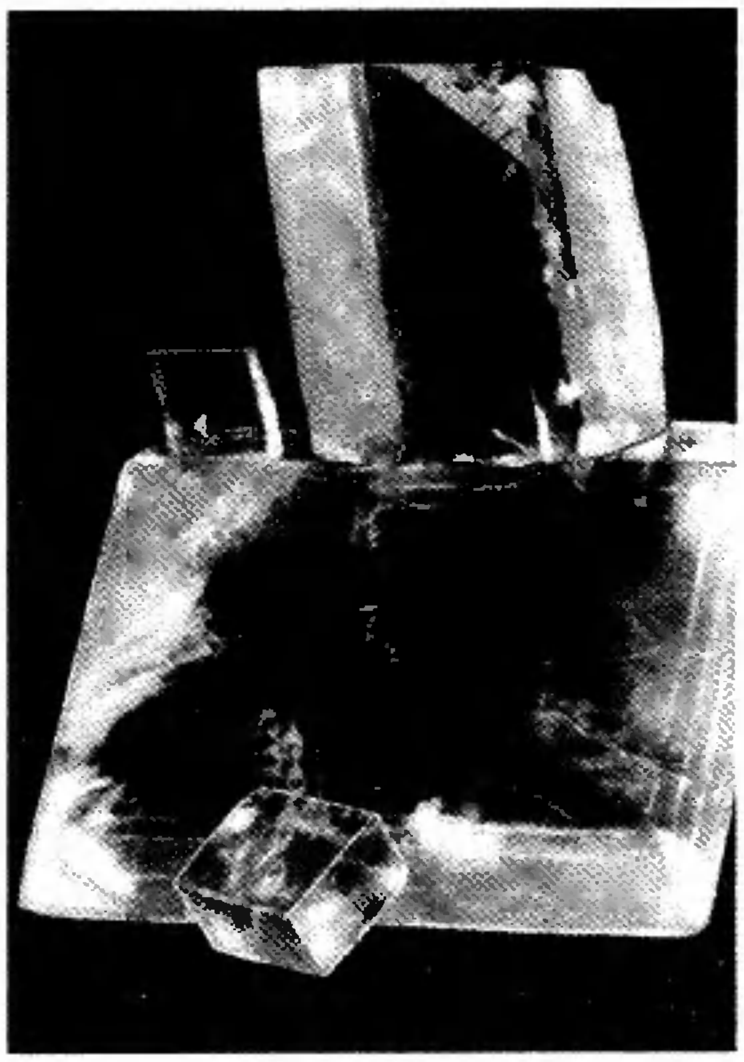
С.В.Вавиловым совместно с В.Л.Лёвшиным было определено так же отклонение от закона Бугера при очень больших интенсивностях. Они наблюдали так называемое просветление кристаллофосфоров при возбуждении их источниками света большой интенсивности. Однако объяснение этих явлений стало возможным лишь после появления новых мощных источников света — лазеров и создания нового направления исследований взаимодействия света с веществом — квантовой электроники.

Свет в кристаллах

Совершенно удивительные и на первый взгляд фантастические явления происходят при распространении света в кристаллах.

В 1669 году из Исландии в Данию были привезены большие куски прозрачных кристаллов кальцита ($CaCO_3$), которые позднее стали называть исландским шпатом. Изучая оптические свойства этих кристаллов, профессор Копенгагенского университета Эразм Бартолин (1625—1698) обнаружил удивительное их свойство — явление двулучепреломления (двойного лучепреломления).

Это открытие произошло случайно. В том же (1669) году соотечественником Бартолина Николаем Стеноном (1638—1685) был установлен один из законов кристаллографии, отражающих высшую гармонию в Природе, — закон постоянства углов. В своем трактате «О твердом, естественно содержащемся в твердом» он сформулировал его следующим образом: «На плоскости число и длина сторон кристалла по-разному изменяются без изменения их углов». Бартолин проверял этот закон, исследуя кристаллы исландского шпата. Обрисовывая грани кристаллов, он сравнивал различные чертежи. Однажды, положив кристалл исландского шпата на чертеж, он увидел, что чертеж раздвоился. Снял кристалл с бумаги. Перед ним лежал один чертеж. Положил кристалл на сделанные записи — и опять то же самое. Все буквы раздвоились. На что бы он ни смотрел сквозь исландский шпат — все удваивалось. В своем трактате «Опыты с двупреломляющим исландским кристаллом, которые привели к открытию чудесного и необыкновенного преломления», изданном на латинском языке в 1669 году, он пишет: «В дальнейшем ходе моего исследования кристалла откры-



лось чудесное и необычайное явление. Предметы, рассматриваемые через кристалл,.. представляются удвоенными».

Если положить кристалл исландского шпата на картон с отверстием, осветив картон снизу, обнаружим, что проходящий через отверстие луч света разлагается на два. Один проходит нормально к пластинке без преломления — его называют обыкновенным. Другой отклонится внутри кристалла в сторону, но выйдет из него по тому же направлению, что и первый луч. Его называют необыкновенным. Свойства этого луча изменяются в зависимости от направления распространения света в кристалле (такая зависимость свойств от направления распространения называется анизотропией). Исследование лучей, прошедших через кристалл, с помощью поляризатора показывает, что оба луча полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Бартолин определил показатель преломления для обыкновенного луча. Для необыкновенного луча он не смог установить никаких закономерностей. Он опубликовал результаты своих работ в Лейпциге, Копенгагене и Лондоне. Однако открытие Бартолина не было признано. Лондонкое Королевское общество создало специальную комиссию для проверки результатов (в комиссию вошли Ньютон, Гук, Бойль и др.). Открытие было названо случайным, а законы — не существующими. Работы Бартолина были забыты, и только двадцать лет спустя в 1691 году голландский физик и математик Христиан Гюйгенс (1629 — 1695) подтвердил правильность открытий Бартолина и обнаружил двулучепреломление света в кварце. В своем «Трактате о свете» он объясняет явление двулучепреломления в исландском шпате на основе созданной им волновой теории света.

В 1801 году французский кристаллограф и минералог Рене Жюст Аюи (1743 — 1822) в «Курсе минералогии» приводит уже целый список двупреломляющих кристаллов. (Он разглядывал тонкую иглу через грани кристалла и для кристаллов с достаточно большим двулучепреломлением наблюдал удвоенную картину.) Аюи впервые разделил кристаллы на однопреломляющие и двупреломляющие и показал, что к однопреломляющим кристаллам относятся вещества, у которых «интегрирующие молекулы отличаются высокой симметрией», т.е. это должны быть кристаллы в форме кубов, октаэдров и т.д.

Удивительное явление двулучепреломления в исландском шпате Исаак Ньютон пытался объяснить особым расположением частиц в кристалле. Он писал: «Частицы исландского кристалла действуют на лучи все в одном направлении, вызывая необыкновенное преломление. Поэтому нельзя ли предположить, что при образовании этого кристалла не только установились в строй и ряды, застывая в правильных фигурах, но также посредством некоторой полярной способности повернули свои одинаковые стороны в одном направлении частицы, составляющие этот кристалл?».

С правильным строением кристаллов связывал двулучепреломление и Гюйгенс. Он говорил: «По-видимому правильность, которая обнаруживается в этих произведениях Природы (кристаллах), вызывается расположением составляющих их мельчайших невидимых и равных частиц. Исландский же шпат состоит из маленьких круглых телец, не сферических, но сплющенных, сфероидальных».

Теорию распространения света в кристаллах дал французский физик Огюстен Френель (1788 — 1827). Он показал, что в кристаллах распространяются (в общем случае) две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Им проведена классификация кристаллов по типу оптических поверхностей, рассмотрены вопросы эллиптической и круговой поляризации, вращения плоскости поляризации, указано на возможность существования конической рефракции, количественно установлены законы отражения и преломления света, которые дают возможность определить интенсивность и поляризацию света после преломления и отражения.

С чем же связано явление двулучепреломления?

За счет действия поля электромагнитной волны происходит смещение электронных оболочек относительно атомных ядер. В ионных решетках, кроме того, смещаются отдельные ионы относительно друг друга. Однако это смещение происходит лишь при низких частотах (инфракрасная часть спектра), так как их большая масса не позволяет следовать за полем высокой частоты. Это смещение заряженных частиц называется электрической поляризацией кристалла. Электрическая поляризация, в свою очередь, приводит к появлению электромагнитного поля, накладывающегося на поле первоначальной волны. Если поляризация кристалла зависит от направления электрического поля волны, то появляется анизотропия диэлектрической проницаемости и коэффициента преломления. Анизотропия в коэффициенте преломления и приводит к возникновению двулучепреломления.

Рассмотрим двулучепреломление в кристаллах, состоящих из вытянутых не сферических молекул, длина которых больше их ширины, причем молекулы выстроены так, что их большие оси параллельны. Если на кристалл падает электромагнитная волна, то такая структура молекул способствует тому, что электроны поддаются легче колебаниям вдоль оси молекулы, чем поперек нее. Электрическое поле волны, направленное вдоль осей молекул, будет вызывать один эффект, а электрическое поле, направленное под прямым углом к оси молекулы, совсем другой. Таким образом, распространение этих двух волн будет происходить с различными скоростями, а следовательно, и с различными показателями преломления, т.е. возникнет двулучепреломление.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 — 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1601» или «Ф1608». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1601—М1603 предлагались на LX Московской математической олимпиаде, задача М1604 — на весеннем туре Турнира городов, М1605 — на втором (очном) туре Соросовской олимпиады по математике.

Задачи Ф1608 — Ф1612 предлагались на Московской физической олимпиаде.

Задачи М1601 — М1605, Ф1608 —Ф1612

М1601. Пусть $f(x)$ — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма $a+b+c$ которых равна 0, выполнено неравенство

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

В.Произволов

М1602. 1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки — оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9, б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой?

М.Евдокимов

М1603. а) Фигура M на плоскости Oxy представляет собой пересечение единичного квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ с полуплоскостью $ax+by\le c$ (a, b и c — положительные числа). Докажите, что площадь M вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2ab}\left((c)_+^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right),$$

где $(x)_+$ означает наибольшее из чисел x и 0: $(x)_+ = \max\{x,0\}$. б) Выведите аналогичную формулу для объема многогранника M в пространстве $Oxyz$, представляющего собой пересечение единичного куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ с полупространством $ax+by+cz\le d$ (a, b, c и d — положительные числа).

А.Канель-Белов

М1604. Внутри выпуклого многоугольника F расположен второй выпуклый многоугольник G. Хорда многоугольника F — отрезок, концы которого лежат на границе F, — называется *опорной* к многоугольнику G, если она пересекается с G только по границе: содержит либо одну вершину, либо сторону G. Докажите, что
а) найдется опорная хорда, середина которой лежит на границе G;
б) найдутся по крайней мере две такие хорды.

В.Дольников, П.Пушкарь

М1605. Имеются N карточек, на которых написаны различные (неизвестные) числа. Они разложены на столе по кругу числами вниз. Надо найти три какие-нибудь лежащие рядом карточки такие, что число, написанное на средней карточке, больше, чем на каждой из двух соседних. При этом разрешается перевернуть последовательно не более k карточек. Докажите, что это возможно, если а) $N=5$, $k=4$; б) $N=76$, $k=10$; в) $N=199$, $k=12$.

В.Протасов

Ф1608. Мэр одного городка начал получать жалобы на большую автомобильную пробку перед светофором на главной улице. Скорость машин при движении составляла 6 м/с, а средняя скорость продвижения по пробке — всего 1,5 м/с. При этом время свечения светофора зеленым светом было равно времени свечения красным (время свечения желтым пренебрежимо мало). Мэр распорядился увеличить время свечения зеленым светом в 2 раза, оставив прежним время свечения красным. Чему станет равна средняя скорость продвижения машин по пробке? Считать, что скорость машин при движении не изменилась. Учесть, что при включении зеленого света автомобили начинают двигаться не одновременно.

Р.Сеннов

Ф1609. На горизонтальной шероховатой поверхности находятся две одинаковые длинные тонкостенные трубы, оси которых параллельны. Одна труба покоится, а вторая катится по направлению к ней без проскальзывания со скоростью v. Происходит абсолютно упругий удар (трением труб друг о друга при ударе можно пренебречь). Коэффициент трения скольжения между трубами и поверхностью равен μ. На каком максимальном расстоянии друг от друга могут оказаться трубы после удара?

С.Варламов

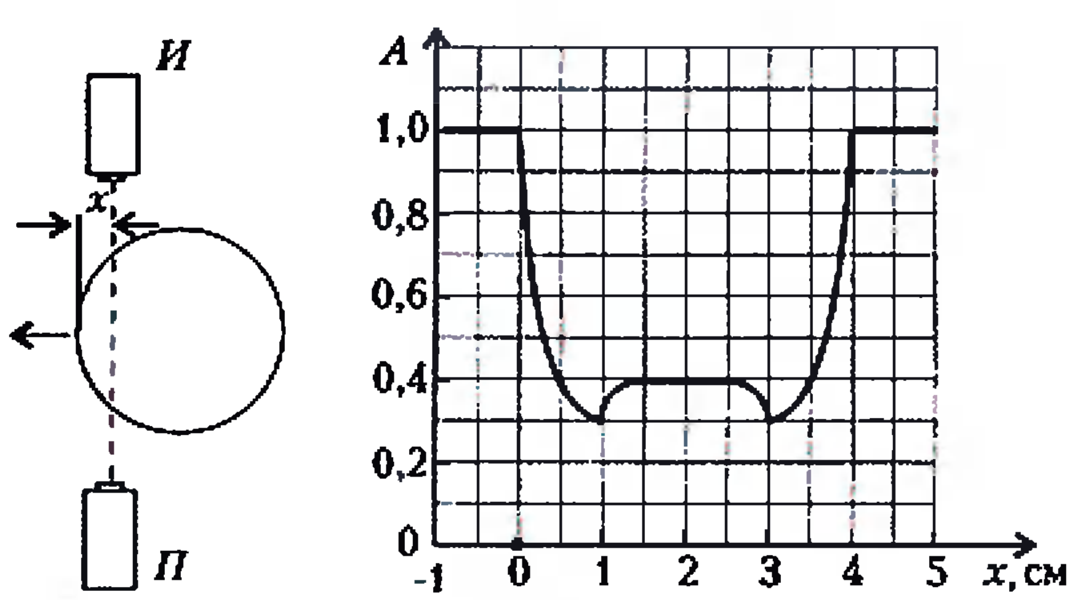
Ф1610. Зависимость приведенной температуры T/T_0 гелия от приведенного давления p/p_0 имеет вид окружности, центр которой находится в точке (1; 1), причем минимальная приведенная температура гелия в этом процессе равна τ_m. Найдите отношение минимальной и максимальной концентраций атомов гелия при таком процессе.

В.Погожев

Ф1611. Тонкое проволочное кольцо радиусом R, заряженное зарядом Q, и металлическая сфера меньшего радиуса r размещены так, что их центры совпадают. Сфера заземлена очень тонким длинным проводником. Найдите потенциал точки, находящейся на оси кольца на расстоянии x от его плоскости.

В.Погожев

Ф1612. Рентгеновский аппарат состоит из точечных источника *И* и приемника *П*, жестко закрепленных на



станине. Между источником и приемником перемещают цилиндрический толстостенный баллон (см. рисунок). При этом интенсивность рентгеновского излучения, регистрируемая приемником, зависит от координаты x так, как показано на графике. Есть ли внутри баллона содержимое, поглощающее рентгеновские лучи?

А.Андрианов

Решения задач М1576 — М1585, Ф1593 — Ф1597

М1576. *а) Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре черных точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?*

б) Можно ли 8 вершин куба разбить на две четверки так, чтобы в каждой плоскости, проходящей через любые три точки одной четверки, находилась точка из другой четверки?

Ответ на оба вопроса а), б) утвердительный. Пример для а) — это проекция на плоскость примера для б)

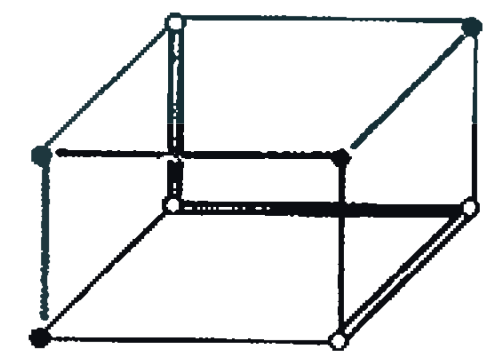


Рис.1

(рис.1): каждая из двух четверок — вершины трехзвенной ломаной, состоящей из трех попарно перпендикулярных ребер куба.

Замечание. Конструкцию задачи б) можно обобщить: на такие же четверки можно разбить восемь вершин

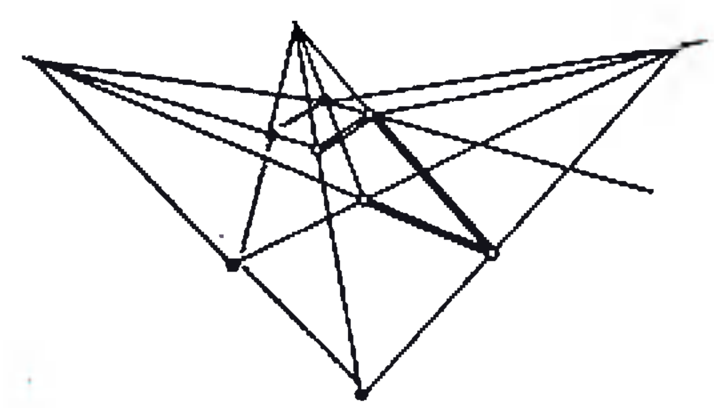


Рис.2

многогранника, шесть граней которого — четырехугольники, и каждая из трех четверок ребер, не имеющих общих вершин, параллельна или лежит на прямых, пересекающихся в одной точке («проективный куб», рис.2). Это обобщение тесно связано с описанием следующей пространственной конфигурации: назовем два тетраэдра *двойственными*, если вершины каждого из них лежат в плоскостях граней другого. Подумайте, сколько существует тетраэдров, двойственных к данному.

Н.Васильев, И.Шарыгин

М1577. *В треугольнике отношение синуса одного угла к косинусу другого равно тангенсу третьего. Докажите, что высота, проведенная из вершины первого угла, медиана, проведенная из вершины второго, и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке.*

Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC, в котором AH — высота, BK — медиана, CL — биссектриса. Из условия

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\gamma \qquad (1)$$

следует, что углы ABC и ACB острые, поскольку $\sin\alpha > 0$ и в треугольнике не может быть двух тупых углов. Следовательно, основание H высоты AH — внутренняя точка отрезка BC.

Найдем отношения, в которых делят высоту HA (считая от основания) два других отрезка. Высота HA параллелограмма $ABCD$ делится его диагональю BD в отношении

$$\frac{BH}{AD}=\frac{BH}{BC}=\frac{c\cos\beta}{a}=\frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Биссектриса же CL делит сторону HA треугольника HAC в отношении

$$\frac{HC}{CA}=\cos\gamma. \qquad (3)$$

Отношения (2) и (3) равны в том и только в том случае, когда $\sin\gamma\cos\beta=\cos\gamma\sin\alpha$, что эквивалентно условию (1).

Таким образом, условие (1) эквивалентно тому, что AH, BK и CL пересекаются в одной точке.

Замечания. 1. Для треугольника задачи $\left|\angle BAC-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}-\angle BAH$ тогда и только тогда, когда $\angle BCA>\frac{\pi}{4}$. Это легко следует из (1).

2. Из предыдущего замечания сразу следует, что если в остроугольном треугольнике ABC биссектриса CL, медиана BK и высота AH пересекаются в одной точке, то $\angle BCA>\frac{\pi}{4}$.

Это — задача IV Всесоюзной математической олимпиады (см. книгу Н.Б.Васильева и А.А.Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» — М .: Наука, 1988; задача 135).

Нетрудно показать, что для любого угла BAC треугольник задачи существует. Из этого следует, что для тупоугольного треугольника задачи неравенство $\angle ACB\ge\pi/4$ выполняется не всегда.

3. Если в неостроугольном треугольнике ABC высота AH, медиана BK и биссектриса CL пересекаются в одной точке, то $\angle ACB>\angle ABC$. Это можно доказать геометрически, но проще — с помощью (1).

Л.Альтшулер, В.Сендеров

М1578. *Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y=f(x)$, определенной при всех x, для которой*

$$f(f(x))=x^2-1997.$$

Основная идея решения: разобраться, как устроены *орбиты* отображения $x\to g(x)=x^2-1997$, т.е. последовательность

$$x,\ g(x),\ g(g(x)),\ldots$$

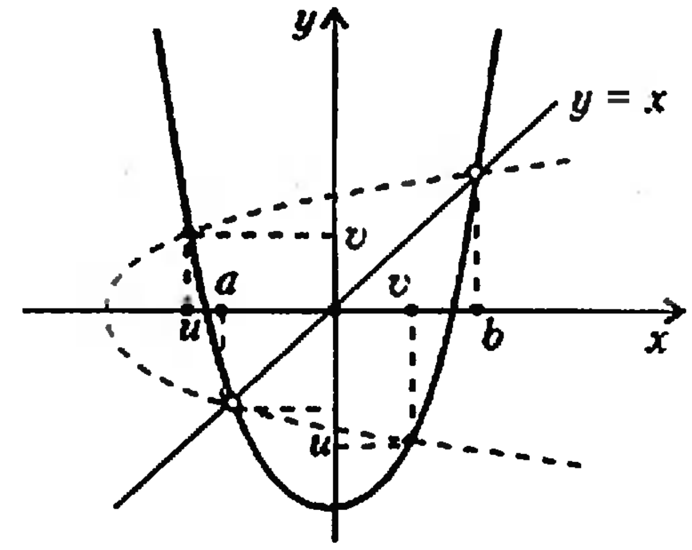
Нетрудно видеть, что при достаточно большом q, скажем, $q>1$ (в частности, при $q=1997$), функция $g(x)=x^2-q$ имеет две *неподвижные точки* — это корни уравнения $g(x)=x$; обозначим их a и b. Кроме a и b, уравнение $g(g(x))=x$ имеет еще два корня — обозначим их u и v. Чтобы их найти, достаточно заметить, что многочлен

$$g(g(x))-x=\left(x^2-q\right)^2-q-x$$

делится на $g(x)-x=x^2-x-q$, и разложить его на множители:

$$x^4-2qx^2-x+q^2-q=\left(x^2-x-q\right)\left(x^2+x-q+1\right);$$

a и b — корни первого из трехчленов, u и v — второго. Они существуют и различны при $1+4(q-1)>0$,



т.е. при $q>3/4$. При этом $g(u)=v$, $g(v)=u$. Все это хорошо видно из рисунка. Таким образом, точки u, v образуют единственный цикл $u\to v\to u$ порядка 2 отображения $x\to g(x)$.

Предположим теперь, что $g(x)=f(f(x))$. Ясно, что неподвижные точки и циклы порядка 2 функции f — это неподвижные точки функции g, и обратно: если $f(a)=c$, то $f(c)=f(f(a))=g(a)=a$, поэтому $g(c)=f(f(c))=c$, т.е. $c=a$ или $c=b$.

А цикл порядка 2 функции g должен получаться из цикла порядка 4 функции f: если $f(u)=z$, то $f(z)=v$; если $f(v)=w$, то $f(w)=u$. При этом z, w отличны от a, b, v, u (и друг от друга). Но тогда $g(z)=f(f(z))=w$, $g(w)=z$.

Таким образом, у функции g должен быть еще один цикл порядка 2, отличный от $u\to v\to u$. А такого у функции $g(x)=x^2-q$ нет.

Замечание. Поскольку в задаче допускаются и разрывные функции f, мы никак не можем использовать специфические свойства множества $\boldsymbol{R}$, на котором определена функция $g(x)=x^2-q$, и поэтому единственная информация о ней, которую нужно использовать — это структура орбит: сколько из них конечных (циклических), какие сливаются в одну орбиту и т.п.

Н.Васильев, М.Смуров, С.Богатый

М1579. *Пусть A', B', C', D', E', F' — середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника $ABCDEF$. Известны площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.*

Заметим, что

$$S_{ABC'}=\left(S_{ABC}+S_{ABD}\right)/2, \qquad (1)$$

поскольку все эти три треугольника имеют общее основание AB (рис.1), а высота $\Delta ABC'$ равна полусумме высот ΔABC и ΔABD, опущенных на AB. Сложив

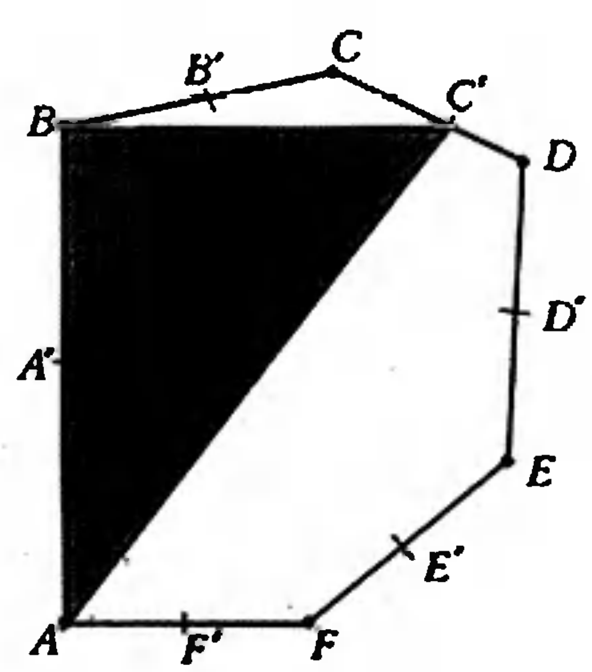


Рис. 1

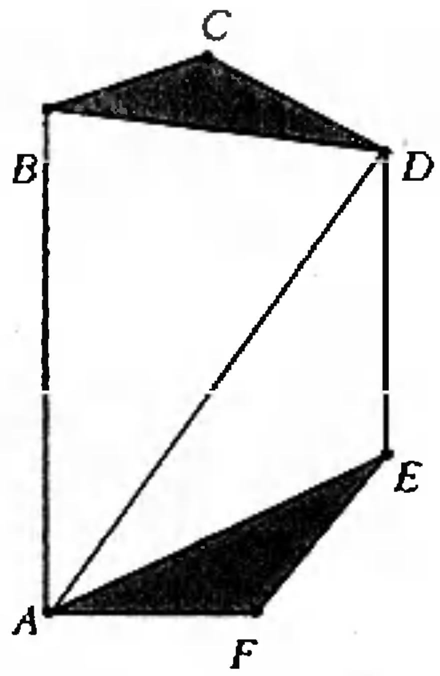


Рис.2

шесть равенств, аналогичных (1), получим, что известная нам сумма S' площадей треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB' равна сумме $(S_1+S_2)/2$, где S_1 — сумма площадей шести треугольников ABC, BCD, ..., отрезаемых малыми диагоналями, а S_2 — сумма площадей треугольников ABD, BCE, CDF, DEA, EFB, FAC, полученных «циклическим сдвигом» вершин из ΔABD. С другой стороны, разрезав шестиугольник так, как показано на рисунке 2, и еще двумя аналогичными способами, получающимися из этого разрезанная «циклическим сдвигом» (в том же направлении $A \to B \to C \to \ldots$), для площади S шестиугольника получим равенство $3S = S_1 + S_2$. Отсюда $S = 2S'/3$.

Н.Васильев

М1580. *Можно ли несколькими отрезками и дугами разрезать круг на части так, чтобы сложить из этих частей равновеликий квадрат?*

Разумеется, нет. Предположим, что такое разрезание возможно. Рассмотрим кусочки, составляющие квадрат. Выберем из них все те, в границу которых входят дуги, которые будут составлять границу круга или являются дугами того же радиуса r. В квадрате суммы длин этих дуг, к которым кусочки примыкают «снаружи» и «изнутри» (с выпуклой и вогнутой стороны), очевидно, равны. А в круге разность между теми и другими должна равняться длине окружности πr. Получили противоречие.

А.Белов

М1581. *а) Существует ли шестизначное число A такое, что среди чисел A, $2A$, $3A$, ..., $500\,000A$ ни одно не оканчивается шестью одинаковыми цифрами?*
б) Для каждого целого $k > 1$ найдите наименьшее натуральное $N = N(k)$ такое, что при любом натуральном A хотя бы одно из чисел A, $2A$, $3A$, ..., NA оканчивается k одинаковыми цифрами.*

Ответ: а) существует, б) $k = 10^n - 9$. Решим сразу б). Заметим сразу, что для A кратного 5 или 2 легко указать число K (соответственно, $K = 2\cdot 10^{n-1}$ или $K = (5\cdot 10^{n-1})$ из первой половины ряда 1, 2, ..., 10^n, для которого KA оканчивается n нулями. Поэтому A следует искать среди чисел, взаимно простых с 10. Основная идея решения заключена в такой (известной) лемме.

Лемма. *Пусть A взаимно престо с 10. Тогда числа A, $2A$, ..., $10^n A$ дают при делении на 10^n (в некотором порядке) все возможные остатки по одному разу.* (Другими словами, число KA может оканчиваться любыми n цифрами.) В самом деле, остатки при делении на 10^n чисел MA и KA при $|M-K| < 10^n$ различны, поскольку $(M-K)A$ не делится на 10^n, а всего остатков ровно 10^n: 0, 1, ..., 10^{n-1}, т.е. среди остатков чисел KA ($K = 1, 2, \ldots, 10^n$) каждый встретится один раз. Остается найти такое число A, что остатки E, $2E$, ..., $9E$, где E — число, записываемое n единицами, появятся на 9 последних (перед $K = 10^n$) местах, т.е. при K от $10^n - 9$ до $10^n - 1$. Достаточно позаботиться, чтобы $(10^n - 1)A$ давало остаток E: $(10^n - 1)A = E + 10^n B$ при целом B. Тогда при $m = 2, \ldots, 9$ будет $(10^n - m)A = mE + 10^n(B - m + 1)$. Таким образом, на роль A нужно взять $10^n - E = 88\ldots89$.

С.Токарев

М1582. *Все точки плоскости Oxy с целыми координатами (x, y) раскрашены в два цвета — синий и красный. Докажите, что найдется бесконечное одноцветное (синее или красное) множество, симметричное относительно некоторой точки.*

Пусть множество Z^2 целочисленных точек (x, y) плоскости Oxy окрашено красным и синим цветом. Для точек $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$ определим подмножества $S(O)$ и $S(A)$ множества Z^2 следующим образом. Точку B из Z^2 отнесем к подмножеству $S(O)$, если точка, симметричная точке B относительно точки O, имеет тот же цвет, что и точка B. Аналогично, точку B из Z^2 отнесем к подмножеству $S(A)$, если точка, симметричная точке B относительно точки A, имеет тот же цвет, что и точка B. Если по крайней мере одно из подмножеств $S(O)$, $S(A)$ бесконечно, то, как легко заметить, задача решена. Поэтому далее мы предполагаем подмножества $S(O)$, $S(A)$ конечными.

Выберем натуральное число m так, чтобы m превышало абсолютные значения ординат $|y|$ всех точек (x, y) подмножеств $S(O)$, $S(A)$. Пусть для определенности точка $M_0(0, m)$ красная. Так как точка M_0 не принадлежит подмножеству $S(O)$, то точка $M_0'(0, -m)$ синяя. По выбору числа m, точка M_0' не принадлежит подмножеству $S(A)$. Значит, точка $M_1(2, m)$, симметричная точке M_0' относительно точки A, красная. Заменяя в наших рассуждениях точку M_0 точкой M_1, приходим к заключению, что точка $M_2(4, m)$ также красная. Продолжая рассуждения, получаем, что для любого натурального числа k точка $M_k(2k, m)$ красная. Далее, отразим точку M_0 относительно точки A, а затем полученную точку отразим относительно точки O. Получим красную точку $M_{-1}(-2, m)$. Таким же образом от точки M_{-1} переходим к красной точке $M_{-2}(-4, m)$ и т.д. В итоге все точки подмножества $\{M_n$: n — произвольное целое число$\}$ оказываются красными. Осталось заметить, что это подмножество симметрично относительно точки M_0.

Замечание. Множество целочисленных точек плоскости легко раскрасить в три цвета так, чтобы не было одноцветных бесконечных подмножеств, симметричных относительно некоторой точки плоскости. В этой связи возник ряд вопросов, ответы на которые автору неизвестны. Вот лишь два из них.

1. Можно ли множество целочисленных точек пространства окрасить в три цвета так, чтобы не было бесконечных одноцветных подмножеств, симметричных относительно некоторой точки пространства? Такая раскраска в четыре цвета существует.

2. Верно ли, что для любого раскрашивания точек прямой в четыре цвета найдется бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторой точки прямой? Для раскрашивания в три цвета это так.

И.Протасов

М1583. *Докажите, что а) медиана произвольного тетраэдра (отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани) меньше среднего арифметического длин ребер, выходящих из той же вершины; б) биссектриса тетраэдра (отрезок, идущий от вершины до противоположной грани и одинаково наклоненный к граням, содержащим эту вершину) меньше полусуммы длин ребер, выходящих из той же вершины. в) Верно ли для биссектрисы неравенство из пункта а)?*

а) Напомним вначале доказательство аналогичного неравенства для треугольника:

$$m_a < \frac{b+c}{2}. \qquad (*)$$

Достаточно достроить треугольника ABC до параллелограмма $ABA'C$: в треугольнике $AA'C$ будет $2m_a < AC + CA' = b + c$. Видим также, что $\vec{AC} + \vec{CA'} = \vec{AC} + \vec{AB} = 2\vec{AD}$, где $\vec{AD}$ – медиана. Последнее равенство можно получить и по-другому, сложением двух очевидных равенств $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$ и $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. Из $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ снова получаем (*).

Исходя из (*), легко дать геометрическое доказательство а).

Пусть ABC – основание тетраэдра $ABCD$, DM_1 – медиана треугольника ABD. Рассмотрим треугольник CDM_1, в нем $CM = 2MM_1$. Отобразим D симметрично относительно M_1: в треугольнике CDD' отрезок CM_1 – медиана. Следовательно, $DM = \frac{2}{3}m_D$.

Имеем: $m_D < \frac{2DM_1 + DC}{2}$, $2DM_1 < DA + DB$.

Следовательно, $\frac{3}{2}DM < \frac{1}{2}(DA + DB + DC)$, что и требовалось доказать.

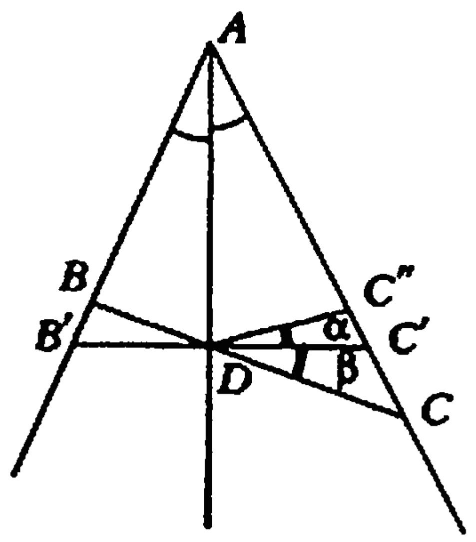
Аналогично можно получить векторное равенство $\frac{1}{2}((\vec{DA} + \vec{DB}) + \vec{DC}) = \frac{3}{2}\vec{DM}$, из которого сразу следует а).

б) Заметим вначале, что справедлив плоский аналог неравенства задачи – неравенство

$$l_a < \frac{b+c}{2} \qquad (**)$$

для треугольника. Это неравенство легко доказывается, разумеется, если воспользоваться какой-либо из различных формул для биссектрисы l_a либо векторами. Но можно доказать (**) и геометрически.

Пусть AD – биссектриса треугольника ABC. Проведем через точку D прямую $B'C' \perp AD$ (см. рисунок).



Так как $AD < AB' = \frac{AB' + AC'}{2}$, то достаточно доказать, что $BB' < CC'$.

Так как $\alpha > \beta$, то $DC > DC''$. Следовательно, $CC' > C''C'$. Но $C''C' = BB'$.

Вот иное доказательство. По свойству биссектрисы $BD < CD$. Значит, $B_1D < C_1D$, где $B_1(C_1)$ – проекция точки $B(C)$ на прямую AD. Следовательно, $BB' < CC'$ (поскольку эти два отрезка образуют с AD одинаковые углы).

Для получения еще одного геометрического доказательства (**) достаточно воспользоваться (*) и легко доказываемым фактом: во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Приступим теперь к доказательству неравенства задачи.

Пусть $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$ – боковые ребра тетраэдра $ABCD$, l_A – его биссектриса, идущая от вершины A.

Пусть далее $b \ge c \ge d$; вписанный шар касается ACD в точке P. Обозначим через O центр вписанного шара; через l – пересечение плоскостей AOP и BCD; через M – точку пересечения прямых AP и l. Таким образом, AM – касательная к шару в сечении AOP, M – точка пересечения прямых l и CD. Пусть AN – вторая касательная к шару в этом сечении (точка N лежит на прямой l). Рассмотрим треугольник AMN и воспользуемся (**). Имеем:

$$l_A < \frac{AM + AN}{2} < \frac{c+b}{2} < \frac{b+c+d}{2}.$$

в) Нет.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть в тетраэдре $ABCD$ будет $AB = AC$, $DB = DC$, $l_A = AE$, F – середина отрезка BC, $AF > AD$. Устремим $x = BF = CF$ к нулю. При этом E стремится к F. Следовательно, $AE \to AF$, $\frac{b+c+d}{3} \to \frac{2AF + AD}{3}$. Но $\frac{2AF + AD}{3} < AF$.

Замечания. 1. Вместо числа 3 можно взять любое $2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

2. Разберемся теперь и в ситуации с l'_A («биссектрисой», равноудаленной от лучей).

Легко построить пример, когда $l'_A = 1$, $b + c + d \to 0$.

Если l'_A лежит внутри $ABCD$, то оценка прежняя:

$$l'_A < \frac{b+c+d}{2}$$

(доказательство: l'_A оценивается сверху выходящей из A биссектрисой одной из боковых граней).

Покажем, что эта оценка неулучшаема.

Возьмем треугольник ABC, $AB = AC = 1$, $l_{BAC} > \frac{2}{2+\varepsilon}$ (где $\varepsilon > 0$). Пусть A – вершина конуса, AB и AC – его образующие, l_{BAC} – его ось.

Осталось выбрать D так, чтобы было $\frac{2 + AD}{2+\varepsilon} < l_{BAC}$.

В.Сендеров

М1584. *Бесконечная последовательность чисел a, b, c, d, ... получается сложением двух геометрических прогрессий. Может ли она начинаться такими четырьмя числами a, b, c, d:*

а) 1, 1, 3, 5; б) 1, 2, 3, 5; в) 1, 2, 3, 4; г) 1, 2, 3, 2?

д) Докажите, что если первые четыре члена a, b, c, d – рациональные числа, то все члены последовательности – рациональные.

Пусть эти прогрессии ux^{n-1} и vy^{n-1} ($n = 1, 2, 3, \ldots$), так что $a = u + v$, $b = ux + vy$, $c = ux^2 + vy^2$, $d = ux^3 +$

$+ vy^3$. Положим $x + y = p$, $xy = q$. Поскольку

$$\left(ux^n + vy^n\right) = (x+y)\left(ux^{n-1} + vy^{n-1}\right) - xy\left(ux^{n-2} - vy^{n-2}\right), \quad (1)$$

для определения p и q получаем систему линейных уравнений

$$bp - aq = c, \; cp - bq = d, \quad (2)$$

а для определения x и y (а затем u, v из линейной системы $u + v = a$, $ux + vy = b$) достаточно решить квадратное уравнение

$$z^2 - pz + q = 0; \quad (3)$$

если оно имеет различные корни z_1 и z_2, можно взять $x = z_1$, $y = z_2$.

Перейдем к конкретным вопросам, заданным в условии. Ответы на первые два вопроса положительны. Прогрессии в примере а) можно подобрать устно (особенно если догадаться умножить все числа на 3): это

$$\frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^n}{3} \; (n = 1, 2, 3, 4).$$

В примере б) из системы (2) $2p - q = 3$, $3p - 2q = 5$ находим $p = q = 1$, из уравнения (3) $z_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$, так что каждая прогрессия оказывается состоящей из иррациональных чисел: если $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, то общая формула

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}. \quad (4)$$

Ответы на вопросы в), г) отрицательны. В случае в) получается уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$, у которого кратные корни $x = y = 1$ (а наша последовательность не постоянная). В случае г) из системы $2p - q = 3$, $3p - 2q = 2$ найдем $p - q = -1$, $p = 4$, $q = 5$, а уравнение $z^2 - 4z + 5 = 0$ не имеет вещественных решений. (Впрочем, если выйти в область комплексных чисел, нужные прогрессии со знаменателями $2 + i$ и $2 - i$ — корнями уравнения $(z-2)^2 = -1$, разумеется, находятся без труда.)

Наконец, утверждение д) сразу следует из формул (1) и (2) для нашей последовательности $r_n = ux^n + vy^n$. Если $a = r_1$, $b = r_2$, $c = r_3$ и $d = r_4$ рациональные числа, то из (2) ясно, что p и q рациональны, а из (1), записанной в виде $r_n = pr_{n-1} - qr_{n-2}$ ясно, что рациональны и все последующие члены.

Замечание. Из решения ясно, что сумма двух геометрических прогрессий — последовательность a_n ($n = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющая *линейному рекуррентному уравнению второго порядка*:

$$a_{n+1} = pa_n - qa_{n-1} \text{ (при } n \geq 2\text{)}.$$

Обратно, любая такая последовательность a_n может быть записана в виде суммы двух геометрическмих прогрессий, знаменатели которых — корни *характеристического уравнения* $z^2 - pz + q = 0$ (быть может, комплексные), или если характеристическое уравнение имеет двукратный корень z_0 (т.е. $p^2 - 4q = 0$), — в виде $a_n = (\alpha n + \beta)z_0^n$, где α и β — некоторые константы.

Н.Васильев

М1585. *В новой лотерее на карточке из $36 = 6\times 6$ клеток надо отметить 6. При розыгрыше лотереи называются некоторые 6 «черных» (проигрышных) клеток. Билет считается выигравшим, если на нем не отмечено ни одной черной клетки. Какое наименьшее число билетов нужно купить, чтобы наверняка среди них был хоть один выигравший? Решите ту же задачу для карточки из $N = k\times k$ клеток, из которых надо отмечать k, при четном k.*

Ответ: 9 карточек; $k + 3$ карточки.

9 карточек K_1, K_2, ..., K_9 можно заполнить так: в K_i при $i = 1, 2, 3, 4, 5$ отметить все клетки i-й строки, в K_6 — левые половины 1-й и 6-й строк, в K_7 — правую половину 1-й и левую 6-й, в K_8 — левую половину 2-й и правую 6-й, в K_9 — правые половины 2-й и 6-й строк.

В самом деле, если 6 клеток, объявленных черными, стоят в разных строках, то в одной из половин — левой или правой — 6-й строки и в одной из половин 1-й или 2-й строки нет черных клеток, так что выиграет один из билетов $K_6 - K_9$. А если в 6-й строке две черных клетки, то выиграет один из билетов $K_1 - K_5$.

Докажем, что 8 карточек заполнить требуемым образом нельзя, т.е. для 8 заполненных карточек всегда можно объявить проигрышными такие 6 клеток, что в каждой карточке хотя бы одна из отмеченных клеток окажется проигрышной.

В самом деле, если есть клетка, отмеченная не менее чем в трех карточках, то объявим ее проигрышной. Поскольку карточек, где она не отмечена, будет не более 5, то справедливость доказываемого утверждения в этом случае очевидна.

Пусть теперь ни одна из клеток не отмечена более чем в двух карточках. Ясно, что найдется клетка A, отмеченная в двух карточках. В каждой из 6 других карточек будет отмечено по 6 клеток из 35 (кроме A), откуда, по принципу Дирихле, среди этих 35 клеток найдется клетка B, отмеченная в двух карточках. Проигрышными здесь можно объявить A, B и по одной отмеченной клетке из каждой карточки (каковых будет не более 4), где ни A, ни B не отмечены.

Вторая задача решается совершенно аналогично.

Замечание. Сформулируем более общую задачу. Имеются одинаковые карточки по N клеток, на каждой из которых надо заполнить некоторые K клеток, после чего L клеток будут объявлены проигрышными. Какое наименьшее число карточек $m = m(N, K, L)$ надо заполнить, чтобы среди них нашлась выигрышная? Общий ответ, видимо получить здесь очень трудно. (Один частный случай предлагался в этом году на заочной Соросовской олимпиаде; некоторые участники доказали, что $m(10, 4, 3) = 10$, но решение требовало непростого перебора вариантов.)

С.Токарев

Ф1593. *На горизонтальном столе стоит тонкостенный цилиндрический стакан. Диаметр стакана $D = 10$ см, высота его $H = 8$ см. В стакан помещают тонкую спицу, как показано на рисунке 1. При какой длине спицы она может оставаться неподвижной? Масса спицы $m = 60$ г, масса стакана $M = 65$ г. Трения нет.*

Спица может начать двигаться одним из двух способов — либо она опрокинет стакан, не проскальзывая относительно него, либо выскользнет из стакана, оставляя его неподвижным. Ясно, что в зависимости от соотношения масс спицы и стакана может реализоваться либо

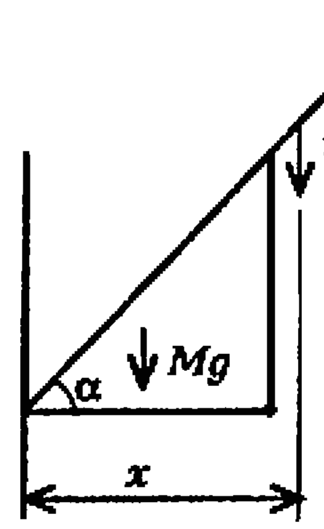


Рис.1

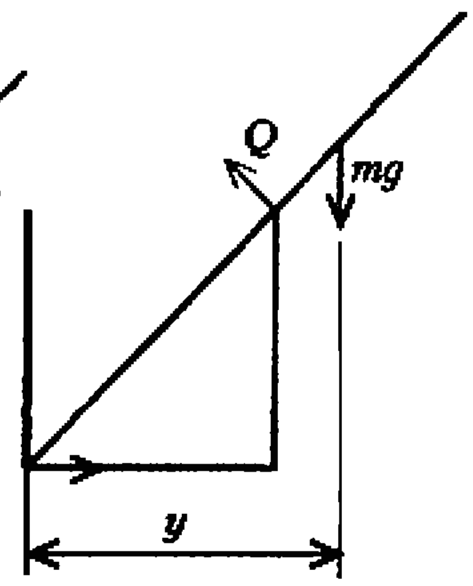


Рис.2

первый вариант, либо второй. Рассмотрим для начала первый. Итак, спица и стакан «склеены», стакан вот-вот начнет опрокидываться — он уже опирается на стол одной точкой (см. рис.1). Запишем равенство моментов сил тяжести относительно этой точки:

$$\frac{MgD}{2} = mg(x - D),$$

откуда

$$x = D(1 + 0{,}5M/m) \approx 15{,}4 \text{ см}.$$

Длина спицы при этом составляет

$$L = \frac{2x}{\cos\alpha} \approx 39{,}5 \text{ см}.$$

Для второго случая нужно рассмотреть равновесие спицы при вращении относительно верней точки касания со стаканом (рис.2). Будем считать, что сила реакции Q в этой точке перпендикулярна спице, и запишем равенство моментов сил относительно нижнего конца спицы:

$$mgy = Q\sqrt{D^2 + H^2}.$$

По вертикали сила тяжести уравновешена проекцией силы реакции (сила, которая действует на нижний конец спицы, горизонтальна — спица уже не давит на дно стакана):

$$Q\cos\alpha = mg.$$

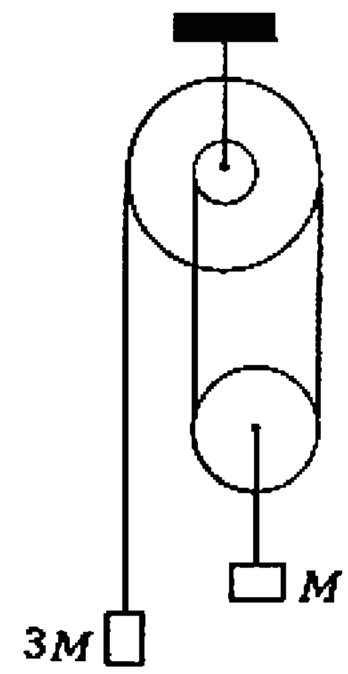
Отсюда найдем

$$y = \frac{D^2 + H^2}{D} \approx 16{,}4 \text{ см}.$$

Это больше, чем в первом случае; значит, при длине спицы $L \approx 39{,}5$ см стакан вместе со спицей начнет опрокидываться.

А.Коршиков

Ф1594. *На оси может вращаться блок, состоящий из двух склеенных дисков радиусов R и $2R$ (см. рисунок). Длинная нить закреплена одним концом на окружности малого диска и на этот диск намотано несколько витков, а другой конец нити образует петлю, удерживающую нижний блок, диаметр которого подобран так, что все свешивающиеся концы нити вертикальны. К подвижному блоку привязан груз массой M, к свободному концу длинной нити прикреплен груз массой $3M$. Найдите ускорения грузов. Блоки и нити невесомые, трение в осях отсутствует, движение считать происходящим в плоскости, перпендикулярной осям блоков.*



В описанной ситуации необычно «выглядят» силы натяжения — нити не проскальзывают по поверхностям блока, там могут быть силы трения, в результате чего силы натяжения в разных частях длинной нити неодинаковы. Обозначим силу натяжения куска нити, привязанного к грузу $3M$, буквой Q, а натяжения свисающих кусков нити, удерживающих нижний блок, — буквой T (для нижнего блока все как обычно — моменты сил уравновешены при одинаковых натяжениях нити с двух сторон). Тогда сила натяжения нити, привязанной к грузу M, составит $2T$. Связь между этими силами мы найдем из анализа моментов сил, действующих на верхний блок. Он невесом, поэтому сумма всех моментов должна быть нулевой: $T \cdot 2R = TR + Q \cdot 2R$, откуда $Q = T/2$.

Теперь найдем связь между ускорениями грузов. Пусть верхний блок повернулся на некоторый угол α, тогда груз $3M$ опустится на $2R\alpha$, на «внутренний» блок намотается $R\alpha$, свисающий петлей конец нити укоротится на $R\alpha$, а нижний блок и привязанный к нему груз M поднимутся на $0{,}5R\alpha$. Отсюда видно, что если груз $3M$ движется с ускорением, равным a и направленным вниз, то ускорение груза M направлено вверх и составляет $a/4$.

Итак, запишем для каждого груза уравнение динамики:

$$2T - Mg = \frac{Ma}{4}, \quad 3Mg - \frac{T}{2} = 3Ma$$

и найдем искомое ускорение:

$$a = \frac{44}{49}g \approx 9 \text{ м/с}^2.$$

А.Блоков

Ф1595. *В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится небольшое количество гелия. Атмосферное давление отсутствует, поршень «висит» над дном сосуда на высоте H. Поршень очень быстро поднимают на высоту $10H$ относительно дна сосуда и отпускают. На какой высоте над дном сосуда он установится после того, как его колебания затухнут? Сосуд теплонепроницаемый, теплоемкостью стенок и поршня можно пренебречь. Трение поршня о стенки пренебрежимо мало. Несколько лишних для этой за-*

дачи данных: масса поршня M, ускорение свободного падения g, площадь дна сосуда S. Что понимать в условии под выражением «очень быстро поднимают»? Как изменится ответ, если поднимать поршень очень медленно?

Если поршень поднимать очень быстро — так, чтобы при его удалении молекулы газа не успевали с ним соударяться, — то температура газа после установления равновесия не должна измениться. Правда скорость поршня при таком движении должна существенно превышать скорость молекул (этакий «сверхзвуковой» поршень). Итак, поршень находится на высоте $10H$, газ «успокоился», и его температура равна начальному значению T_0. После отпускания поршень будет долго колебаться, но через большой промежуток времени остановится. Обозначим высоту поршня в этом положении h, а температуру газа — T_1. Изменение потенциальной энергии поршня при отпускании равно приращению внутренней энергии газа (подумайте сами, как именно происходит процесс передачи энергии от поршня газу):

$$Mg(10H-h)=1{,}5\nu R(T_1-T_0).$$

Для начального положения поршня на высоте H и конечного на высоте h можно записать уравнения равновесия (по условию задачи атмосферного давления нет):

$$Mg=\frac{\nu RT_0}{V_0}S=\frac{\nu RT_0}{H},$$

$$Mg=\frac{\nu RT_1}{V_1}S=\frac{\nu RT_1}{h}.$$

Решая простую систему трех уравнений, получаем

$$h=\frac{23}{5}H=4{,}6H.$$

Если поршень поднимать очень медленно, то он установится на первоначальной высоте.

Р.Александров

Ф1596. *Нелинейный двухполюсник имеет «квадратичную» вольт-амперную характеристику — напряжение между его выводами пропорционально квадрату текущего через него тока. Двухполюсник подключают к батарейке напряжением $\mathcal{E}$ последовательно с вольтметром, при этом вольтметр показывает половину напряжения батарейки. Параллельно двухполюснику подключают еще один такой же вольтметр. Найдите показания обоих вольтметров. Внутреннее сопротивление батарейки считать малым.*

При первом включении напряжение двухполюсника равно напряжению вольтметра и составляет $\mathcal{E}/2$. Обозначим токи приборов в этом случае через I (они соединены последовательно). После подключения второго вольтметра напряжение двухполюсника и его ток уменьшатся. Пусть ток двухполюсника стал kI, тогда напряжение двухполюсника изменилось в k^2 раз и составило $k^2\mathcal{E}/2$. Таким же будет напряжение параллельного вольтметра, и через него будет идти ток k^2I (во сколько раз изменилось его напряжение по отношению к половине напряжения батарейки, во сколько же раз изменилось его напряжение по отношению к I). Ясно, что через последовательный вольтметр течет суммарный ток, а его напряжение изменилось от $\mathcal{E}/2$ до $\left(\mathcal{E}-k^2\mathcal{E}/2\right)$, т.е. в $\left(2-k^2\right)$раз. Приравнивая выражения для токов, мы получим уравнение относительно неизвестной величины k, решив которое найдем ответ задачи. Итак,

$$kI+k^2I=\left(2-k^2\right)I,$$

или

$$2k^2+k-2=0.$$

Нас интересует только положительный корень: $k=\left(-1+\sqrt{17}\right)/4$. Квадрат этого числа равен примерно 0,61, именно во столько раз уменьшится напряжение на двухполюснике по отношению к половине напряжения батарейки. Таким образом, параллельный вольтметр покажет теперь $k^2\mathcal{E}/2\approx0{,}3\mathcal{E}$, а последовательный вольтметр покажет $\left(2-k^2\right)\mathcal{E}/2\approx0{,}7\mathcal{E}$.

З.Рафаилов

Ф1597. *На цилиндрический железный сердечник намотана катушка, ее выводы подключены к источнику переменного напряжения. На оси катушки расположен виток в форме квадрата размером $d\times d$, сделанный из тонкого провода с очень высоким сопротивлением; плоскость квадрата перпендикулярна оси. Точно такой же квадрат расположен параллельно первому, но чуть дальше от катушки — расстояние между квадратами составляет $d/8$. Сила тока через «ближний» виток равна I_0, через «дальний» — чуть поменьше, а именно $0{,}98I_0$. Витки раздвигают параллельно так, что расстояние между ними составляет теперь d — получаются как бы две противоположные грани куба. Полученный «куб» поворачивают на 90°, и теперь витки образуют боковые грани куба, параллельные оси катушки, при этом центр системы все время остается на месте. Какие токи текут по виткам в этом случае?*

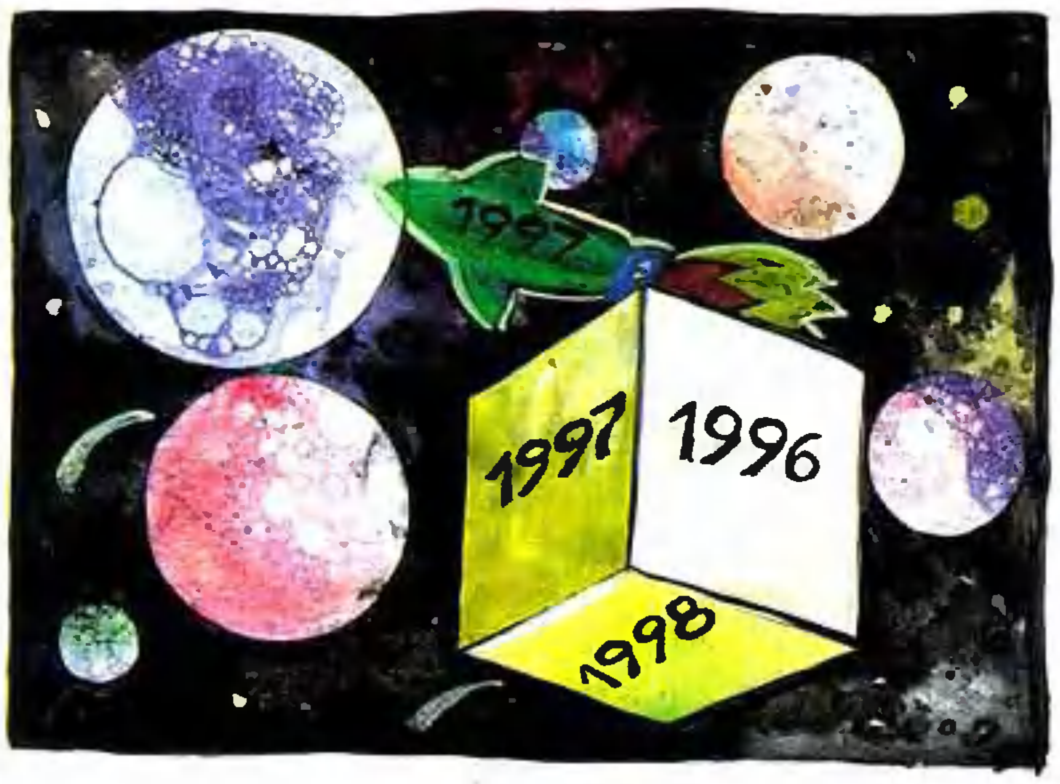
При удалении витка от катушки магнитное поле уменьшается — условие задачи позволяет считать, что при удалении на $d/8$ амплитуда падает на 2%. Положим, приближенно, что при удалении на d поле упадет на 16% (у нас нет более разумного способа оценить уменьшение поля — мы ничего не знаем про размеры и положение сердечника катушки, про форму и размеры самой катушки, поэтому будем пользоваться именно такой оценкой). Это означает, что магнитный поток через удаленный виток — мы еще не поворачивали его, а только удалили на большее расстояние — на 16% меньше и эти проценты «ушли вбок» через боковые стенки куба, по 4% через каждую. Ясно, что после поворота витков они становятся как раз этими боковыми витками и поток через них составляет 4% от потока, создающего в витке ток I_0. Итак, в новом положении витков ток составит $0{,}04I_0$. Заметим, что при решении задачи мы пренебрегли полем самих витков (точнее, их влиянием друг на друга) — витки по условию обладают высоким сопротивлением.

А.Зильберман

Задачи

1. Приближается 2000-й год. Когда до его наступления останется 2000 часов?

А.Савин



2. Четыре черненьких чумазеньких чертенка чертили черными чернилами чертеж и выполнили эту работу за 3 часа. Если бы первый чертенок чертил вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, им потребовалось бы столько же времени, а если бы, наоборот, первый чертил

бы вдвое медленнее, а второй — вдвое быстрее, то они бы управились за 2 часа.

За какое время начертили бы чертеж первые три чертенка без помощи четвертого?

И.Акулич

3. В таблице Пифагора (таблице умножения) выделены «уголки». Докажите, что суммы чисел в уголках образуют последовательность кубов.

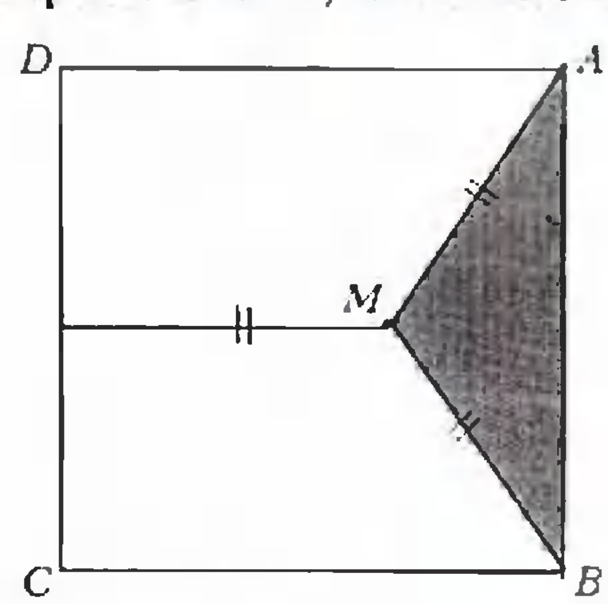
1^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^3	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3^3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4^3	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5^3	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6^3	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7^3	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8^3	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9^3	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Н.Авилов

4. Покажите, что число $1997 + 1996 \times 1997 \times 1998$ является кубом целого числа.

В.Произволов

5. В квадрате $ABCD$ точка M одинаково отстоит от вершин A и B, а также от стороны



CD. Какую часть площади квадрата составляет площадь треугольника ABM?

А.Савин

Иллюстрации И.Тарабановой

Конкурс «Математика 6—8»

Мы начинаем очередной конкурс «Математика 6–8». Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4 — 6 этого года и в №1 за 1998 г. Срок присылки решений задач этого номера — 15 ноября 1997 г. Решения присылайте по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала, а также приглашены на заключительный тур конкурса в летней математической школе в августе 1998 г.

1. Покажите, что если натуральное число n не делится на 3, то найдутся два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n.

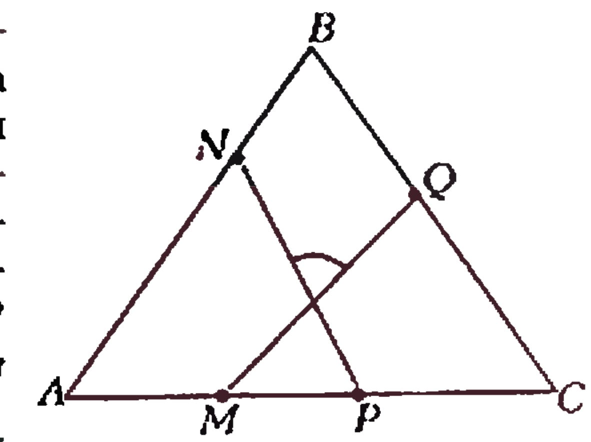
И.Акулич

2. Можно ли разделить числа 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 на две группы так, чтобы сумма квадратов чисел одной группы равнялась сумме квадратов чисел другой группы?

П.Филевич

3. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P и Q расположены так, как это показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Докажите, что угол между отрезками MQ и PN равен 60°.

В.Произволов



4. 25 одноклассников ежегодно в день окончания школы звонят друг другу. В очередном году оказалось, что среди любых трех одноклассников хотя бы одна пара не смогла связаться по телефону. Какое наибольшее количество разговоров между одноклассниками могло произойти?

Д.Хмелев, В.Щиголев

5. В одной большой клетке сидели 38 попугаев. Однажды они передрались, в результате каждый из них выдрал у кого-то другого перо из хвоста и у всех попугаев оказались поврежденными хвосты. Хозяин решил пересадить их в три клетки, которые вмещали 16, 16 и 6 попугаев. Докажите, что он может рассадить попугаев так, чтобы ни один попугай не сидел в одной клетке со своим обидчиком.

И.Акулич

Кругами по лесу, или Кардиоида для грибника

С.БОГДАНОВ

Ранним утром в ясный сентябрьский день мы, трое грибников, вышли с востока на знакомую просеку со старой линией электропередач. Тропинка вывела к приметному столбу с изгрызенным лосями основанием; здесь западнее просеки начинались груздевые места. Решили, разделившись, углубиться в лес и встретиться через 4 часа на том же месте. Компасов не было, но ориентиры были надежными: просека тянется строго с севера на юг, солнце — на востоке, на границах массива — большие озера (рис.1).

Чтобы не отвлекаться на ориентировку и вовремя вернуться, я выбрал простейший вариант движения: половину времени идти в направлении «солнце в спину», а возвращаться — в противоположном направлении. Корзину я наполнил, но на обратном пути пришлось немного скорректировать маршрут; в итоге я вышел на просеку примерно в километре южнее условленного места и опоздал на 15 минут.

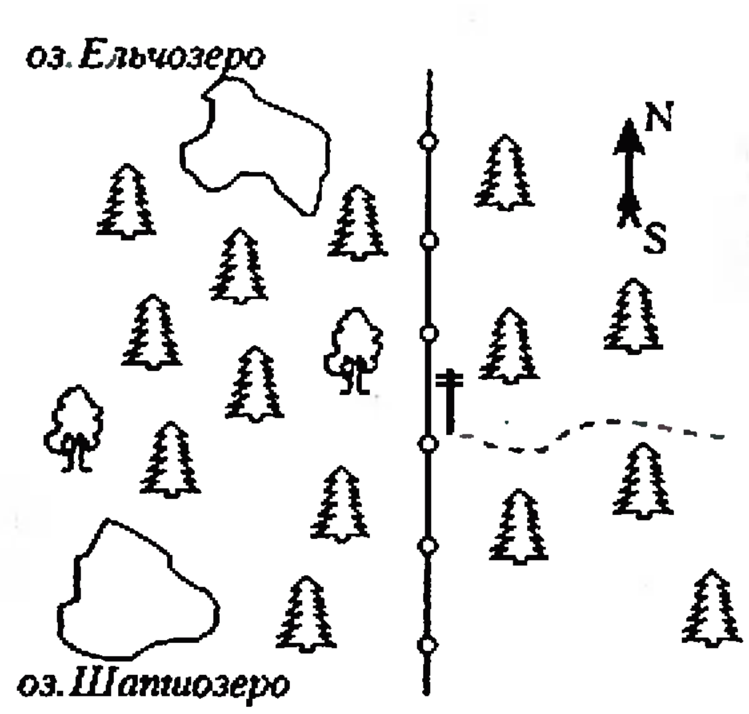


Рис. 1

По возвращении я решил разобраться с траекторией своей прогулки и выяснить, где в принципе мог бы оказаться, если бы строго следовал своему плану. После некоторых разумных допущений задача выглядела так:

Точка B — Солнце — движется в плоскости XY с постоянной угловой скоростью ω по окружности большого радиуса, центр которой расположен в начале координат (рис.2). Точка A — грибник — движется из начала координат с постоянной по величине скоростью v в направлении «от B», т.е. скорость в любой момент направлена вдоль линии «Солнце — грибник». В некоторый момент времени t направление скорости меняется на противоположное, и в дальнейшем точка A движется в направлении «на B». Каковы координаты точки A в момент времени 2t?

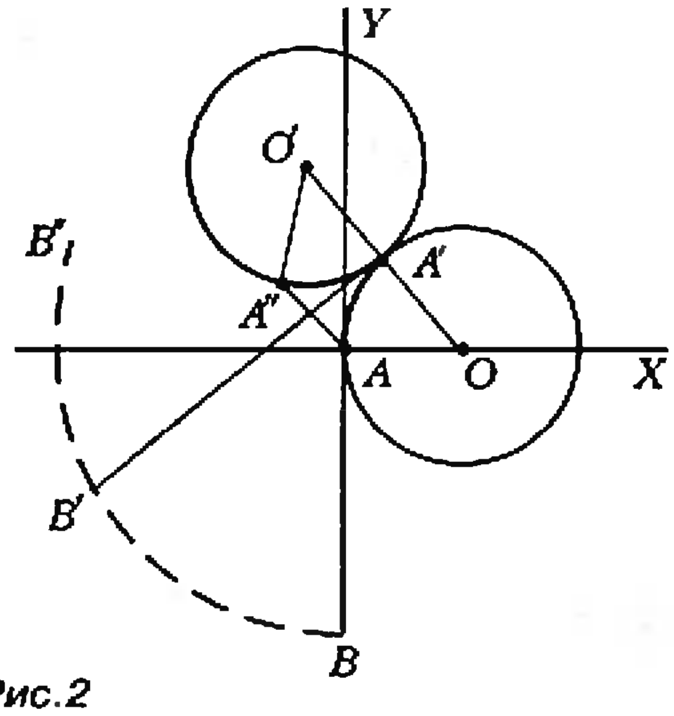


Рис.2

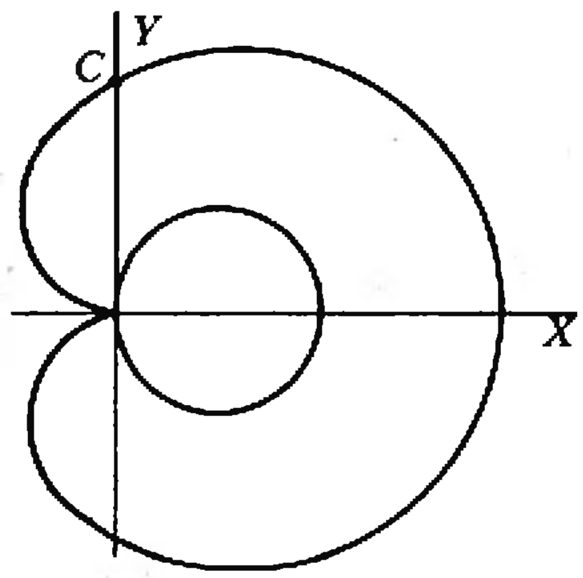


Рис.3

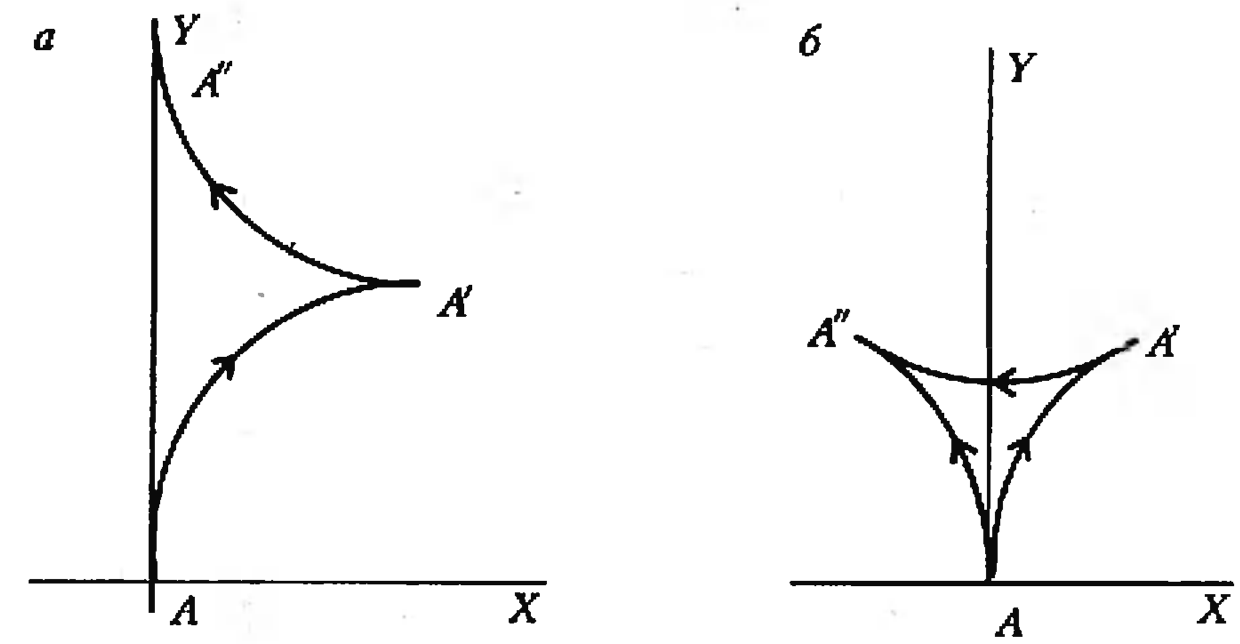


Рис.4

Решение оказалось весьма простым и интуитивно понятным, особенно для тех, кто хотя бы однажды «ходил кругами по лесу». Действительно, точка A движется с одной и той же скоростью по величине, но все время в направлении «от точки B», которая описывает окружность. Следовательно, точка A тоже движется по окружности, причем с той же самой угловой скоростью, что и точка B. За то время, что Солнце переместилось из B в B', грибник описал дугу окружности AA'. Очевидно, аналогичным образом описывается и обратное движение от места поворота A' до конечного положения A''. При этом окружность, по дуге $A'A''$ которой точка движется на обратном пути, имеет тот же радиус, а ее центр O' расположен на линии, перпендикулярной $A'B'$ и проходящей через точку касания A'.

В качестве дополнительного материала для более старших читателей приведем некоторые расчеты. Используя известное соотношение между линейной и угловой скоростями, для радиуса окружности, по которой движется точка A, имеем $R = v/\omega$. Кроме того, из начальных условий задачи следует, что центр окружности находится в точке с координатами $(v/\omega; 0)$. После несложных геометрических выкладок (например, из рассмотрения трапеции $AOO'A''$) нетрудно найти положение конечной точки A'', т.е. расстояние r от начальной точки A и угол $\theta = \angle A''AO$:

$$\theta = \pi - \omega t, \quad r = AA'' = 2v(1+\cos\theta)/\omega.$$

Величины r и θ называют полярными координатами точки. Теперь, учитывая, что $\omega = 2\pi/24$ ч$^{-1}$, проанализируем полученный ответ для характерного интервала возможных значений параметра t : [0, 6] часов. При малых t величина θ немногим меньше π, т.е. наблюдается существенное азимутальное отклонение от первоначального направления $\pi/2$ при относительно небольшом удалении r конечной точки от начальной. При приближении к правой границе указанного выше интервала азимутальное смещение практически исчезает, но существенно увеличивается величина r.

В качестве примера численной оценки воспользуемся значениями t = 2 ч, v = 2 км/ч, соответствующими описанной в начале прогулке. Угол θ оказывается при этом равным $5\pi/6$, а радиус R и удаление r равны приблизительно 8 км и 2,4 км соответственно.

Рисунок 2 позволяет также наглядно геометрически представить положение конечной точки A''. Предположим, что в начальный момент времени окружности O и O' касаются в точке A, а затем окружность O' начинает катиться без проскальзывания по окружности O. К моменту времени t, когда окружности касаются друг друга в точке разворота A', первоначальная точка касания окружности O' переместится в положение A''. Таким образом, множество возможных положений конечной точки A'' маршрута при заданной скорости v и различных значениях t совпадает с траекторией одной из точек окружности O' при ее прокатывании по окружности O. Соответствующая линия в геометрии называется *кардиоидой*, ее график представлен на рисунке 3 (а уравнение было получено выше). Такую линию легко построить, используя подручные средства, а чертеж – при отсутствии карты или в качестве дополнения к ней может – оказаться небесполезным в лесу.

Еще немного дополнений. Точка C на рисунке 3 представляет конечное положение при t = 6 ч, соответствующая траектория изображена на рисунке 4,*а*. Азимутальное отклонение в этом случае, как отмечалось выше, равно 0, но $r \approx$ 16 км при характерных значениях параметров. Таким образом, вариант прогулки на целый день ($2t$ = 12ч) по плану «от Солнца – по Солнцу» в этом случае явно неудачен и даже опасен. Впрочем, в качестве альтернативы здесь можно предложить трехзвенную траекторию (рис.4,*б*), при реализации которой сохраняется главное преимущество – ориентация лишь по Солнцу.

В заключение отметим, что аналогичным образом можно геометрически проанализировать более общий случай, когда прямое и обратное движения происходят с разными скоростями. Легко, в частности, показать, что все конечные положения будут находиться на линии $A'A''$, т.е. увеличение скорости на обратном пути приводит лишь к еще большему удалению от первоначальной точки A.

И последний вывод: все же, собираясь в лес, не забывайте взять с собой компас.

В большинстве стран мира элементы теории вероятностей и статистики изучаются в средней школе и считаются даже более важным математическим предметом (из-за многочисленных применений в физике, биологии, экономике,...), чем многие привычные российским школьникам разделы. В нашей стране, к сожалению, вероятность пока изучают только в очень немногих школах. Цель этой статьи – дать первое представление о понятиях, задачах и результатах теории вероятностей, с надеждой, что отдельные фрагменты этой теории будут все чаще появляться на страницах «Кванта».

Посчитаем вероятности

Н.ВАСИЛЬЕВ, А.СПИВАК

Что такое вероятность? Дать точное определение, которое годилось бы во всех многочисленных применениях, непросто.

Спросите студента-математика, и он отчеканит:

— Вероятностным пространством называется σ-алгебра множеств, на которой задана σ-аддитивная неотрицательная функция (мера), значение которой на всем пространстве равно 1. Вероятность события (множества) — его мера.

— А что такое случайная величина?

— Это измеримая функция.

— А что такое среднее значение случайной величины?

— Это ее интеграл Лебега.

И студент прав. Именно такие определения даны в книге А.Н.Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», вышедшей в свет в 1933 году. Но для первого знакомства этот подход явно не годится: не знает большинство наших читателей, что такое интеграл Лебега!

А как ответит на этот вопрос нематематик? Скорее всего, он скажет, что вероятность события — это его частота. Точнее, если вообразить, что в похожих, многократно воспроизводимых условиях событие иногда происходит, а иногда нет, то вероятность — это доля случаев, в которых оно происходит.

Это объяснение понятнее, но его трудно превратить в точное математическое определение. (Например, если мы 100 раз подбрасываем монету, то естественно ожидать, что примерно в 50 случаях выпадет герб. Но герб не обязательно выпадет именно в 50 случаях. Может быть и 51, и 45, и даже 100 гербов. Вот только вероятность последнего чудовищно мала — скоро мы научимся считать такие вероятности и узнаем, что она равна $1/2^{100} < 1/10^{30}$.)

На самом деле, познакомиться с основными приемами подсчета вероятности может даже шестиклассник. Мы начнем с так называемого *классического (комбинаторного)* определения вероятности и лишь в конце статьи придем, через неравенство Чебышёва, к *закону больших чисел*, отчасти объясняющему связь между вероятностью события и частотой его появления.

Большая часть текста статьи — задачи, одни из которых решены в тексте, а другие оставлены в качестве упражнений (все они занумерованы по порядку, к некоторым даны указания).

Комбинаторное определение

Пусть у нас имеется конечное множество E, состоящее из N элементов. Элементы множества E называются *элементарными событиями* (возможными исходами испытаний). *Событием* называется любое подмножество A множества E. *Вероятность* $\mathbf{P}(A)$ события A задается формулой

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{N},$$

где $|A|$ — число элементов множества A.

Это значит, что вероятность каждого элементарного события (отдельного элемента множества E) равна $1/N$, а вероятность любого события A складывается из них как из атомов.

Такое определение вероятности годится, например, для задач о бросаниях монеты или игрального кубика и вообще для любой ситуации, где есть несколько равноправных (обычно — из соображений симметрии) возможных исходов.

1. *Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность, что*

а) в первый раз выпало меньше 4 очков, а во второй — больше 4;

б) в первый раз выпало меньше очков, чем во второй;

в) в сумме за два броска выпало k очков, где $k = 1, 2, \ldots, 12$?

Решение. Бросить кубик два раза — все равно что независимо друг от друга бросить два кубика. Поэтому всего здесь $6 \cdot 6 = 36$ возможных исходов. Это — пары (x, y), где x — число очков, выпавших на первом кубике, а y — на втором ($1 \le x \le 6$ и $1 \le y \le 6$). Их удобно изображать 36 точками, расположенными в виде квадрата 6×6 (рис.1).

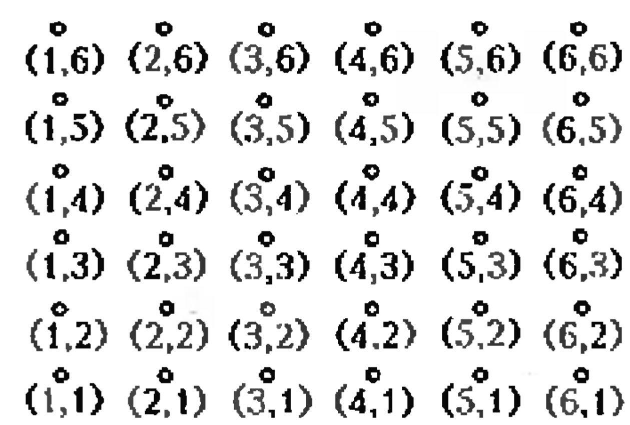


Рис. 1

Осталось отметить точки (x, y), удовлетворяющие соответствующему условию, посчитать их количество и разделить на 36 (рис. 2).

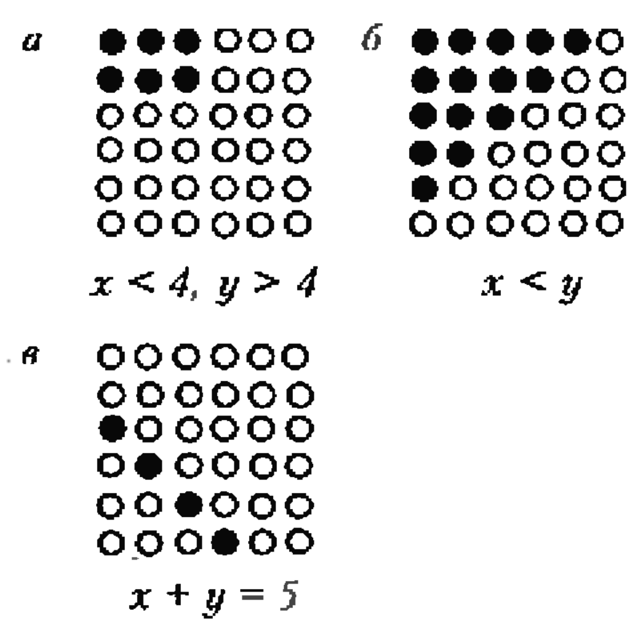


Рис. 2

Получаем ответы: а) $3 \cdot 2/36 = 1/6$; б) $15/36 = 5/12$. А ответ в пункте в) изображен в виде *гистограммы*, где высоты столбиков соответствуют вероятностям отдельных событий (рис. 3).

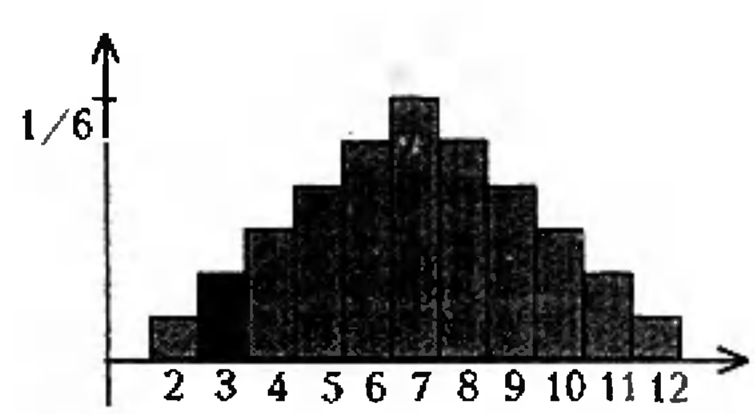


Рис. 3

Теперь разберем три задачи посложнее.

(Продолжение см. на с. 34)

Что такое арифметика?

Вопрос: «Что такое арифметика?» лет 20 назад воспринимался бы всеми с улыбкой, потому что учебники математики для начальной школы в то время назывались именно так: «Арифметика».

Арифметика – это наука о числах и действиях с ними.

Умножение, деление, сложение и вычитание называются арифметическими действиями – это простейшие действия с числами, которые должен уметь выполнять каждый грамотный человек.

Обучение грамоте состоит из привития навыков чтения, письма и счета. Другие науки – история, география, физика, химия и т.п. не столь часто бывают нужны в повседневной жизни. Часто ли нам требуется знать, в каком году взошел на престол Василий II или куда впадает воспетая Чуковским река Лимпопо? А вот величину сдачи с купюры в 10000 рублей при покупке трех батонов хлеба по 3265 рублей стоило бы уметь вычислять каждому.

Учебники арифметики мы находим среди древних египетских папирусов и вавилонских клинописных глиняных табличек, не говоря уже о многочисленных книгах, издававшихся с начала книгопечатания.

В России одним из первых учебников математики был учебник Л.Ф.Магницкого «Арифметика, или числительница, есть художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее и многопохвальное, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное». Нужно сказать, что этот учебник содержал не только курс арифметики, но и сведения по алгебре, геометрии и тригонометрии, практические расчеты по навигации, технике и коммерческому делу. Сам Леонтий Филиппович Магницкий, русский математик, педагог, преподавал математику в Московской школе математических и навигационных наук, а затем в Морской академии в Петербурге.

На фронтисписе «Арифметики» изображена аллегорическая фигура, олицетворяющая Арифметику. Аллегорические изображения наук в виде женских фигур были частыми сюжетами картин средневековых художников. На этих картинах Арифметика всегда занимает центральное место. «Арифметика – царица наук» – это мнение всегда было бесспорно. В настоящее время это утверждение звучит так: «Во всякой науке столько науки, сколько в ней математики».

Нужно отметить, что хотя слово «арифметика» произошло от греческого «аритмос» – число, но арифметикой вначале называли всю науку. Позже этим словом стали называть лишь сведения о числах и действиях над ними.

В настоящее время арифметику в том виде, о котором мы говорили, нельзя назвать наукой, так как свойства арифметических операций давно известны и придумать здесь что-то новое невозможно. Но арифметика породила ряд наук.

Во-первых, эта алгебра, которая возникла на путях поиска методов решения возникающих задач, формулирования этих методов, их обобщений и применений не только к числам, но и другим объектам. В алгебре рассматриваются арифметические операции в применении не только к числам, но и к векторам, преобразованиям плоскости и пространства, функциям и многому другому. При этом свойства операций – коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность – в одних случаях сохраняются, а в других могут и не соблюдаться.

Второй наукой, возникшей из арифметики, является теория чисел. Первые вычислители-абацисты, считавшие на досках-абаках с помощью камешков, использовали свой инструмент для игр и развлечений, подобно тому, как современные программисты используют свой компьютер в часы отдыха. Так родились игры «Ним» и «Дзяньшидзы», о которых уже рассказывалось в журнале. Но, раскладывая камешки в виде прямоугольника, абацисты обратили внимание, что при некоторых значениях числа камешков такое их расположение выполнить невозможно. Так они пришли к понятиям делимости и простого числа. Свойства чисел, связанные с их разложением на множители, изучает так называемая «мультипликативная теория чисел». Это название пошло от латинского «мультиплико» – умножаю.

Вторая ветвь теории чисел связана с операцией сложения, а именно с представлением числа в виде суммы чисел определенного вида. После открытия Пифагором его знаменитой теоремы математики заинтересовались вопросом: «Для каких троек целых чисел x, y и z справедливо равенство $x^2 + y^2 = z^2$?» Такие тройки стали называть «пифагоровыми». Естественно возникли вопросы: «Какие числа представляются в виде суммы двух квадратов? Какие в виде трех квадратов?» А петербургский академик Христиан Гольдбах в 1742 году высказал гипотезу, что любое четное число представляется в виде суммы двух простых чисел. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута.

Третья наука, возникшая из недр арифметики, – «теоретическая арифметика». Она занимается изучением и конструированием различных числовых систем. К таким системам относятся натуральные числа, рациональные числа, комплексные числа и дальнейшие их обобщения.

Четвертая наука – «формальная арифметика». Это часть математической логики, предназначенная для формализации теории чисел, ее аксиоматического построения. Эта наука сыграла огромную роль при обосновании основных понятий математики.

За долгое время развития арифметики было придумано много различных способов решения задач: «тройное правило», «пропорциональное деление», «фальшивое правило» и ряд других. С введением буквенных обозначений для неизвестных величин необходимость в запоминании этих правил отпала. Поиск решения задачи свелся к составлению уравнения и последующему его решению.

Приведем несколько задач из старинных задачников по арифметике.

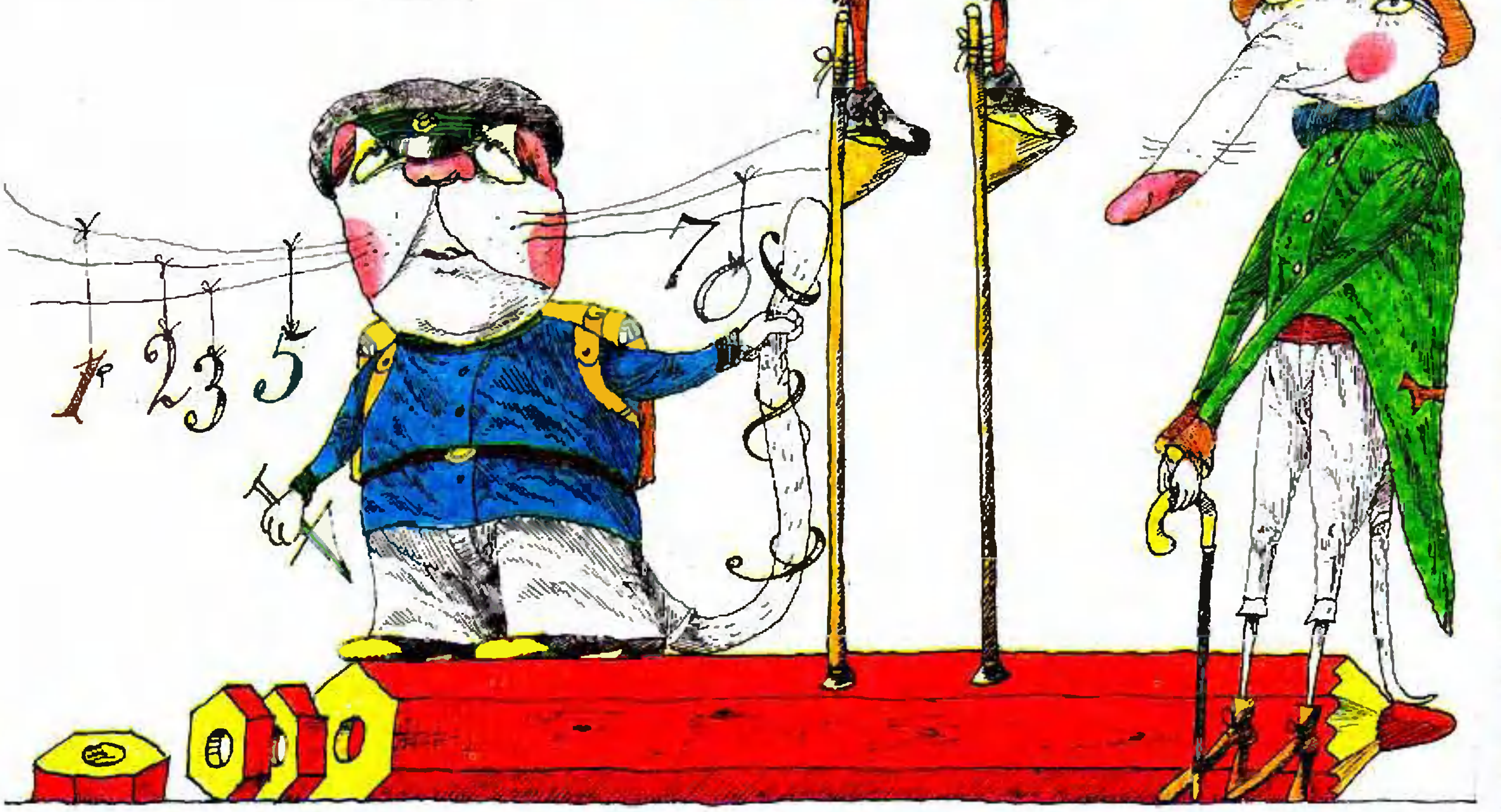
«Некто при найме на работу обещал ему за год службы уплатить деньгами 144 рубля и дать одежду. Слуга расчелся через 7 месяцев и получил в уплату одежду и 54 рубля. Что стоила одежда?»

«Заплачено за 46 пудов сахару на 195 рублей более, чем за 73 фунта чаю; 9 пудов сахару стоят на 30 рублей дешевле, чем 37 фунтов чаю. Что стоит фунт чаю и пуд сахару?»

«Помещик нанял двух крестьян за одинаковую поденную плату. Одному из них за 40 дней он отдал 7р. 50к. деньгами и $3\frac{1}{2}$ четверти овса, другому за 24 дня 4 р. 80 к. деньгами и 2 четверти овса. Что стоит четверть овса?»

Эти задачи легко решаются с помощью уравнений. Однако решение их без привлечения алгебры требует искусства или знания специальных правил.

А. Савин



(Начало см. на с. 31)

Пары, тройки, четверки...

2. *Федя знает ответы на 10 вопросов из 30 возможных. В билет включаются два случайно выбранных вопроса из этих 30. Каковы шансы Феди благополучно ответить на оба вопроса?*

Решение. Выясним, сколько всего разных билетов может составить экзаменатор. Их столько, сколько пар можно составить из 30 элементов, т.е. $30 \cdot 29 = 870$.

Как мы нашли это число? Первый вопрос — это любой из 30 возможных. Если он уже выбран, то вторым вопросом может быть любой из 29 оставшихся.

Точно так же посчитаем количество билетов, «благоприятных» для Феди: $10 \cdot 9 = 90$.

Значит, вероятность сдать экзамен равна $90/870 = 3/29 \approx 0{,}103$.

Мы могли рассуждать и чуть иначе: не различать билеты, отличающиеся только порядком вопросов. Тогда разных билетов будет вдвое меньше, т.е. $30 \cdot 29/2 = 435$. Благоприятных для Феди станет тоже в два раза меньше: $10 \cdot 9/2 = 45$. Ответ, конечно, получится тот же самый.

Число неупорядоченных пар из n элементов обозначается C_n^2. Это число встречается во многих ситуациях и вычисляется, как мы уже поняли, по формуле

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3. *Придя на экзамен, Федя узнал, что в билете не 2 вопроса, а 3. Каковы шансы Феди благополучно ответить на все вопросы?*

Решение. На этот раз можно составить $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ разных билетов. В самом деле, первый вопрос можно выбрать 30 способами. Как бы он ни был выбран, вторым может оказаться любой из 29 остальных, а после выбора первых двух вопросов третьим может оказаться любой из 28 остальных.

Точно так же, благоприятных для Феди билетов $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, так что вероятность сдать экзамен равна теперь лишь $720/24360 = 6/203 < 0{,}03$.

Конечно, и в этой задаче можно было не обращать внимания на порядок вопросов в билете, т.е. считать количество трехэлементных подмножеств $\{P, Q, R\}$ множества всех вопросов. Это число в 6 раз меньше, чем $30 \cdot 29 \cdot 28$, поскольку три элемента P, Q и R можно переставить 6 способами: PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ и RQP.

Итак, Федя мог получить любой из $\dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$ разных по содержанию билетов. Благоприятных из них только $10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$. Разделив 120 на 4060, мы получим ту же вероятность.

Число неупорядоченных троек из n элементов обозначается C_n^3. Оно равно

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

4. *Конечно, Феде не повезло, и экзамен он не сдал. А когда Федя пришел в следующий раз, экзаменатор изменил правила: он задает четыре вопроса (случайно выбирая их из 30 возможных). Если Федя ответит на все 4 вопроса, то получит пятерку, если на 3 вопроса — то четверку, если на 2 — тройку, а в противном случае — двойку.*

С какой вероятностью Федя получит оценку а) 5; б) 4; в) 3; г) 2?

Решение. а) Как мы уже видели, всего можно составить $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$ разных билетов. Из них $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ билетов состоят только из известных Феде вопросов, так что вероятность сдать экзамен на «5» равна

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{2}{261} \approx 0{,}0076.$$

В решении пункта а) мы считали разными билеты, отличающиеся лишь порядком вопросов. В следующих пунктах мы не будем их различать, т.е. будем рассматривать не упорядоченные наборы, а подмножества, состоящие из 4 вопросов. Их количество в 24 раза меньше, чем $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$, поскольку 4 элемента можно переставить 24 способами:

PQRS, PQSR, PRQS, PRSQ, PSQR, PSRQ,
QPRS, QPSR, QRPS, QRSP, QSPR, QSRP,
RPQS, RPSQ, RQPS, RQSP, RSPQ, RSQP,
SPQR, SPRQ, SQPR, SQRP, SRPQ, SRQP.

Итак, количество 4-элементных подмножеств 30-элементного множества равно

$$C_{30}^4 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{24} = 27405.$$

б) Федя получит «4», если ему достанется билет, в котором 1 незнакомый вопрос (любой из 20) и 3 знакомых вопроса. Эти 3 вопроса из 10 можно выбрать $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$ способами. Поэтому вероятность получить «4» равна

$$\frac{20 \cdot 120}{27405} \approx 0{,}0876.$$

в) Для получения тройки нужен билет, в котором 2 знакомых и 2 незнакомых вопроса. Эта вероятность равна

$$\frac{C_{10}^2 C_{20}^2}{C_{30}^4} = \frac{(10 \cdot 9/2) \cdot (20 \cdot 19/2)}{27405} \approx 0{,}312.$$

г) Двойку можно получить двояко: ответив на один вопрос билета или не ответив ни на один. Соответствующие вероятности равны

$$\frac{10 \cdot C_{20}^3}{27405} = \frac{10 \cdot (20 \cdot 19 \cdot 18/6)}{27405} \approx 0{,}416$$

и

$$\frac{C_{20}^4}{27405} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17/24}{27405} \approx 0{,}177.$$

Значит, вероятность получить двойку примерно равна

$$0{,}416 + 0{,}177 = 0{,}593.$$

Ответ можно записать в виде таблички:

Отметка	2	3	4	5
Вероятность	0,593	0,312	0,0876	0,0076

Наглядно это распределение можно изобразить гистограммой (рис. 4).

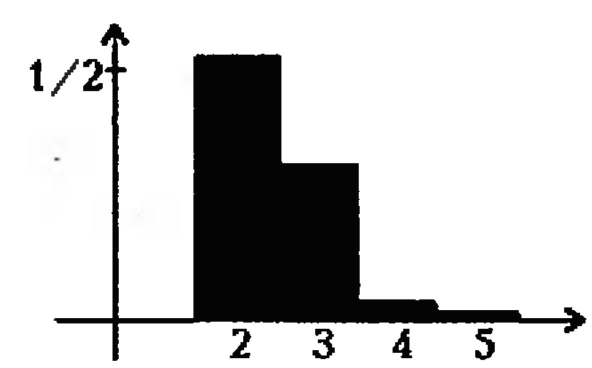


Рис. 4

Заметим, что сумма

$$0{,}0076 + 0{,}0876 + 0{,}312 + 0{,}593 = 1{,}002 \approx 1.$$

На самом деле, конечно, сумма этих вероятностей в точности равна 1, ибо какую-то одну из оценок 2, 3, 4 или 5 Федя получит.

Вообще, если все пространство E элементарных событий разбито на несколько (непересекающихся) множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$, то общее число их элементов равно $N = |E|$:

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_r| = |E|$$

и, следовательно, сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$ равна 1:

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_r) = \frac{|A_1|}{N} + \frac{|A_2|}{N} + \ldots + \frac{|A_r|}{N} = \frac{N}{N} = 1. \quad (1)$$

Про такие события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ говорят, что они образуют *полную систему событий*.

Здесь очень важно, что никакие два из этих событий не пересекаются. Вообще, если два множества A и B (содержащиеся в E) не пересекаются, то говорят, что события A и B *несовместны*. При этом вероятность того, что происходит хотя бы одно из них — вероятность попасть в A или в B, — равна сумме вероятностей событий A и B:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \qquad (2)$$

Мы пользовались этим выше в решении пункта г) задачи 4.

Упражнения

5. Предположим, что Федя знал ответы не на 10, а на 20 вопросов из 30. Каковы тогда были бы вероятности получить оценки 2, 3, 4, 5? Нарисуйте соответствующую гистограмму.

6. 20 человек написали письма друг другу. Сколько всего писем было послано? (Каждый написал письма всем остальным, по одному письму каждому.)

7. 15 гроссмейстеров провели турнир, в котором каждые двое сыграли между собой одну партию. Сколько партий было сыграно?

8. Среди двузначных чисел случайным образом выбираем одно число. С какой вероятностью а) его цифра десятков больше цифры единиц; б) обе цифры равны; в) это число делится на 9?

9. Из 25 учеников класса, в котором учатся Денис, Данила и Димитрий, случайным образом выбрали 10 учеников, которые должны прийти на экзамен к 9 утра, и 10 человек, которые должны прийти к 12 часам. Остальные 5 учеников должны прийти к 14 часам. Какова вероятность, что Денис, Данила и Димитрий а) втроем попадут в первую группу; б) попадут в одну и ту же группу; в) попадут в три разные группы?

Правило произведения. Перестановки и сочетания

Решая задачи про Федю, мы подсчитывали количества разных комбинаций: перестановок, подмножеств конечного множества и тому подобное. Как мы это делали? Основной прием, которым мы пользовались, — правило произведения. Каждый понимает, что если в лесу 100 елок, у каждой елки 20 веток, на каждой ветке 40 лапок, а на каждой лапке 70 иголок, то всего в лесу $100 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 70$ иголок.

Вообще, *если объект x можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект y можно выбрать n способами, то выбор пары (x,y) можно осуществить mn способами.*

Особенно простой вид правило произведения приобретает, если выбор второго элемента y пары (x,y) совсем не зависит от x. Тогда все mn пар удобно записать в таблицу (рис.5).

$$\begin{array}{cccc} (x_1,y_1) & (x_1,y_2) & \ldots & (x_1,y_n) \\ (x_2,y_1) & (x_2,y_2) & \ldots & (x_2,y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_m,y_1) & (x_m,y_2) & \ldots & (x_m,y_n) \end{array}$$

Рис. 5

10. *В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку и блюдце?*

Решение. Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 ($15 = 3 \cdot 5$).

11. *В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?*

Решение. Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно $60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$.

12. *Выбирают случайным образом шестизначное число. С какой вероятностью вторая его цифра равна 3, а четвертая четна?*

Решение. Всего шестизначных чисел 900000. Из них удовлетворяют условию $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10$ чисел, так что вероятность равна

$$\frac{9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{10} = 0{,}05 .$$

Заметьте, что ответ равен произведению $\frac{1}{10}$ (это вероятность того, что вторая цифра равна 3) и $\frac{5}{10}$ (это вероятность того, что четвертая цифра четна). С этим мы уже встречались в задаче 1, а), где вероятность оказалась равной произведению $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Объясним, почему так получается. Представим себе, что мы случайным образом выбираем одну из $N = mn$ клеток таблицы $m \times n$ (см. рис.5), причем событие A состоит в том, что клетка попадает в одну из заданных k строк, а B — что она попадает в один из заданных l столбцов. Тогда пересечение $A \cap B$ состоит из kl клеток и поэтому

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{kl}{N} = \frac{k}{m} \cdot \frac{l}{n} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Вообще, два события A и B называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}(B). \qquad (3)$$

13. *В ряд расположены n фонарей. Сколькими способами можно осветить улицу, считая и тот «способ освещения», когда ни один фонарь не горит? (Говоря математическим языком, надо подсчитать количество подмножеств множества из n элементов.)*

Решение. Первый фонарь может находиться в двух состояниях: гореть или не гореть. Независимо от него второй фонарь может гореть или не гореть. Значит, первые два фонаря могут находиться в $2 \cdot 2 = 4$ состояниях. Добавляя третий фонарь, мы удвоим число возможных состояний. Точно так же, добавление каждого следующего фонаря будет удваивать число состояний. Таким образом, имеется 2^n способов освещения n фонарями.

Заодно мы посчитали количество последовательностей длины n из нулей и единиц. Оно равно 2^n. В само деле, зажженный фонарь можно обозначать единицей, а негорящий — нулем. (Тогда последовательность из n нулей означает, что ни один фонарь не горит, т.е. соответствует пустому множеству. А последовательность из n единиц означает, что все фонари горят.)

Используя правило произведения, легко посчитать общее количество *перестановок*, которые можно составить из n элементов, т.е. количество способов, которыми можно все эти элементы расположить в ряд. Мы уже видели, что оно равно 6 для $n = 3$ и 24 для $n = 4$. В общем случае оно равно

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

В самом деле, если нам нужно расположить в строку n элементов, то первый можно выбрать n способами, после чего второй можно выбрать $(n-1)$ способами, после каждого выбора первого и второго третий — $(n-2)$ способами,..., предпоследний элемент выбирается из двух оставшихся к этому моменту, а последний определен однозначно.

Займемся теперь не менее важными для комбинаторики и теории вероятностей числами сочетаний C_n^k. Мы получим их, решая следующую задачу.

14. *В ряд расположены 5 лампочек. Сколькими способами можно зажечь k из них (для каждого $k = 0, 1, 2, 3, 4$ и 5)? А если лампочек n?*

Решение. 0 ламп можно «зажечь» только одним способом — ни одну не зажигать. 1 лампу из 5 можно выбрать 5 способами, 2 лампы из 5 — 10 способами (действительно, первую можно зажечь 5 способами, после этого остается 4 возможности зажечь вторую лампу; но число $5 \cdot 4$ надо разделить пополам, ибо когда лампы горят, не ясно, какая была зажжена раньше).

Для $k = 3$ ламп получим ответ $5 \cdot 4 \cdot 3/3! = 10$, для $k = 4$ получим

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2/4! = 5$, а для $k = 5$ — 1 способ. (Впрочем, сразу можно было сообразить, что строчка ответов 1, 5, 10, 10, 5, 1 получится симметричной: ведь случаев, когда k ламп горят и остальные $5 - k$ не горят, столько же, сколько случаев, когда все наоборот.)

Вы, конечно, заметили, что, решая задачи 2 и 3 про Федю, мы именно так получали формулы для C_n^2 и C_n^3.

Точно так же выводится и общая формула для C_n^k — числа способов зажечь k ламп из n. Первую мы выбираем из n возможностей, вторую — из $(n-1)$, третью — $(n-2)$, и так k раз (при этом заметьте, что k-ю лампу мы выбираем из $n-k+1$ варианта, а вовсе не из $n-k$, как можно подумать сгоряча). А делить надо на $k!$ — число перестановок k элементов:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Числа сочетаний C_n^k в англоязычных учебниках обозначают иначе: $\binom{n}{k}$. Они появляются в разных ситуациях. C_n^k — это

число k-элементных подмножеств множества из n элементов;

число последовательностей длины n, состоящих из k единиц и $(n-k)$ нулей;

число путей длины n из точки $(0,0)$ в точку $(k, n-k)$ по сторонам единичных клеток;

коэффициент при x^k после раскрытия скобок в выражении $(x+1)^n$.

Биномиальные коэффициенты удобно расположить в виде треугольника Паскаля (рис.6), где каждое число

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 10 1
. . . .
$C_n^0\, C_n^1\, C_n^2 \;\dots\; C_n^{n-1}\, C_n^n$
. . . .

Рис. 6

равно сумме двух стоящих над ним, что соответствует формуле $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Числа сочетаний еще понадобятся нам ниже.

Упражнения

15. Из города A в город B ведут 4 дороги, из B в C — 6 дорог. Сколькими способами можно проехать из A в C?

16. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетны и различны?

17. Сколькими способами можно отметить 8 полей шахматной доски, чтобы никакие два отмеченных поля не лежали ни на одной вертикали, ни на одной горизонтали?

18. Сколько всего шестизначных чисел, все цифры которых нечетные?

19. Выбирают случайным образом трехзначное нечетное число. С какой вероятностью

а) все три цифры разные;

б) первая цифра равна 1;

в) первая цифра равна последней?

20. Пусть в ряд расположены n фонарей, каждый из которых горит или не горит с вероятностью $1/2$. Найдите вероятность того, что горят ровно k фонарей.

21. Из юго-западного угла квадратного города $n \times n$, разбитого улицами на единичные квадраты, выходят 2^n человек. Половина идет на север, половина — на восток. Из всех, кто дошел до очередного перекрестка, половина снова идет на север, половина — на восток. Сколько человек придет на k-й перекресток диагонали?

Сложение и умножение вероятностей

Не всегда вероятности вычисляются по формуле $\mathbf{P}(A) = |A|/N$. Иногда удается одни вероятности вычислять через другие. Например, если даны два множества A и B (содержащиеся в E), то число элементов объединения $A \cup B$ можно посчитать, сложив числа элементов множеств A и B и вычтя число элементов их пересечения $A \cap B$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Поделив на N, получаем для вероятностей

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B). \quad (4)$$

Частный случай этой формулы — для несовместных событий A и B — формула (2).

22. *На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?*

Решение. Перейдем к дополнительным событиям: свет был выключен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шел 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более 20 + 10 + 50 = 80% времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше 100 – 80 = 20% времени.

В этой задаче мы воспользовались переходом от события A к дополнительному $E \setminus A$,[1] которое для краткости часто обозначают $\overline{A}$ (читается: «дополнение к A» или «не A»). При этом

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

23. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Подсказка. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечетны.

24. *В классе 40% мальчиков и 60% девочек. Из мальчиков на роликовых коньках катается каждый второй, а из девочек — 30%. Какая доля учеников этого класса катается на роликовых коньках?*

Решение. Пусть в классе n человек. Тогда мальчиков всего $0{,}4n$, а девочек $0{,}6n$. Значит, катаются $0{,}5 \cdot 0.4n$ мальчиков и $0{,}3 \cdot 0.6n$ девочек, так что искомая доля равна

$$\frac{0{,}5 \cdot 0{,}4n + 0{,}3 \cdot 0{,}6n}{n} =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}38.$$

Последняя формула, если бы речь шла не о процентах и долях, а о вероятностях, называлась бы *формулой полной вероятности*. В общем виде она выглядит так: если $A_1, A_2, \dots, A_r$ — полная система событий, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) +$$

$$+ \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \dots + \mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}_{A_r}(B). \quad (5)$$

Объясним обозначения. Пусть A и B — два события (например, A — «быть мальчиком», B — «кататься на коньках»). Тогда *условной вероятностью $P_A(B)$ события B при условии A* называется отношение $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(A)$. (В нашем примере $\mathbf{P}_A(B) = 0{,}5$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$.)

Чтобы пояснить это определение, вспомним комбинаторное определение вероятности. Если мы желаем перейти от всего пространства E к меньшему пространству A, то следует учитывать только те элементы из B, которые содержатся в A, а их количество равно $|A \cap B|$. При этом $\mathbf{P}(A \cap B) = |A \cap B|/|E|$ и $\mathbf{P}(A) = |A|/|E|$. Отсюда и получается формула условной вероятности

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

Условную вероятность $\mathbf{P}_A(B)$ обозначают и так: $\mathbf{P}(B|A)$. Некоторым больше нравится одно обозначение, некоторым — другое.

[1] *Вообще, для любых двух множеств X и Y через $X \setminus Y$ обозначают множество тех элементов из X, которые не принадлежат Y.*

Часто используется такая формула, вытекающая из определения условной вероятности:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}_A(B).$$

Между прочим, поскольку в левую часть буквы A и B входят симметрично, заодно выполняется и формула

$$\mathbf{P}(B)\ \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}_A(B).$$

Из формулы (7) легко получить формулу полной вероятности:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \mathbf{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbf{P}(A_r \cap B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}_{A_r}(B). \quad (7)$$

Упражнения

25. Мне прислали две посылки. В одной из них 20% груш, 50% яблок и 30% апельсинов, а в другой — 30% груш, 10% яблок и 60% киви. Я, зажмурив глаза, случайным образом выбираю посылку и в ней — фрукт. Какова вероятность, что я выберу апельсин?

26. Известно, что при броске кости выпало четное число. Какова вероятность того, что это число меньше пяти?

27. Докажите, что если события A и B независимы, то и события A и $\bar{B}$ независимы.

28. Двое друзей подкидывают три монеты и хотят вычислить вероятность того, что все три выпадут одной стороной — орлом или решкой. Первый утверждает, что эта вероятность равна $\frac{1}{4}$. Он рассуждает так: вероятность того, что вторая монета ляжет так же, как первая, равна $\frac{1}{2}$, а вероятность того, что третья монета ляжет тем же способом, вдвое меньше — т.е. равна $\frac{1}{4}$.

Второй утверждает, что искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$. Он рассуждает так: какие-нибудь две из трех монет обязательно выпадут одной и той же стороной. Вероятность того, что и третья монета ляжет тем же способом, равна $\frac{1}{2}$. Кто прав?

29. Про некоторую семью известно, что там двое детей. Как-то раз мама вывела на прогулку одного (случайно выбранного) ребенка. Оказалось, что это мальчик. Что более вероятно: что второй ребенок является мальчиком или девочкой?

30 (Задача Паскаля). Два одинаково искусных игрока играют в игру, не допускающую ничейного исхода. Они сделали равные ставки и условились, что тот, кто первым наберет 10 выигранных партий, получит все деньги. Игра была прервана при счете 9 : 8 и не могла быть продолжена. Как должны они разделить деньги?

Случайная величина и среднее значение

Как мы уже говорили во введении, на практике вероятности находят, многократно повторяя опыт и вычисляя долю случаев («частоту»), в которых произошло интересующее нас событие. Например, если много раз подбросить монету, то она упадет цифрой вверх примерно в половине случаев. Такая «устойчивость частоты» при многократном повторении испытания наблюдается во многих ситуациях. Математическое объяснение этой устойчивости дал Я.Бернулли в книге «Искусство предположения», опубликованной в 1713 году. Он установил *закон больших чисел*. Если в каждом из n независимых испытаний с одной и той же вероятностью p может произойти некоторое событие A, то количество Z появлений события A не обязано в точности равняться np и может сильно отклоняться от этой величины; но вероятности значительных отклонений малы: *для всяких положительных чисел* ε *и* η *вероятность* $\mathbf{P}\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| > \varepsilon\right)$ *будет меньше* η *при всех достаточно больших* n.

Более простое, чем у Бернулли, доказательство закона больших чисел получится в конце следующего параграфа из неравенства Чебышёва.

В этом разделе мы будем заниматься такой задачей. Пусть некоторое событие A происходит с вероятностью p. Какова вероятность, что за n независимых испытаний оно произойдет ровно k раз?

Сначала надо придать точный смысл словам «n независимых испытаний A с одной и той же вероятностью p». Для этого служит очень важное вероятностное пространство — так называемая *схема Бернулли*. Оно состоит из 2^n элементарных событий — строк $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ из n нулей и единиц. Вероятность, приписываемая строке, в которой k единиц и $n-k$ нулей, равна $p^k(1-p)^{n-k}$. При $p = 1/2$ получается вероятностное пространство, которое описывает n бросаний симметричной монеты и встречалось в задаче 20. Заметим, что схема Бернулли (при $p \neq 1/2$) не подходит под « комбинаторное» определение вероятностного пространства E, где все «атомы» были равновероятны.

Вот более общее определение, кстати, более подходящее для практических применений.

Определение. *Конечным вероятностным пространством* называется конечное множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, каждому элементу e_i которого приписано неотрицательное число w_i (называемое вероятностью элементарного события e_i), причем их сумма равна единице:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1.$$

Любому событию A (подмножеству $A \subseteq E$) приписывается вероятность

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{e_i \in A} w_i.$$

Последняя формула означает, что $\mathbf{P}(A)$ — это сумма вероятностей всех элементарных событий, из которых состоит A.

Заметим, что основные правила вычисления вероятностей (1) — (7), о которых шла речь выше, при этом сохраняются.

Далее нам потребуются другие новые понятия: случайная величина, ее распределение, ее среднее значение и т.п. Собственно, эти понятия намного старше теории вероятностей и всем хорошо знакомы: они относятся к традиционной статистике, возникшей одновременно с умением записывать числа.

Определение. *Случайной величиной* называется функция X, заданная на множестве E.

Каждому событию $A \subseteq E$ соответствует «характеристическая» случайная величина ξ_A, принимающая значения 0 и 1: $\xi_A(e) = 1$, если $e \in A$, и $\xi_A(e) = 0$ в противном случае (так что можно считать, что «случайная величина» — некоторое обобщение понятия «событие»).

Поскольку мы рассматриваем только конечные множества E, всякая случайная величина $X : E \to \mathbf{R}$ может быть задана набором чисел $X(e_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, N$, которые можно записать в виде таблички. Например, в задаче 1 о двух бросаниях кубика величина «сумма выпавших очков» может быть представлена такой таблицей:

Элементарное событие	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	...	(6,6)
Вероятнось	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	...	$\frac{1}{36}$
X	2	3	3	4	...	12

Если вероятностное пространство состоит из большого числа элементов, то таблица становится совершенно необозримой. Между тем, обычно достаточно знать *распределение* случайной величины, т.е. перечень всех возможных ее значений $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и вероятность $u_j = \mathbf{P}(X = x_j)$ каждого из них. Здесь $X = x_j$ — это событие «случайная величина X равна x_j»; его вероятность u_j — сумма w_i по всем e_i, для которых $X(e_i) = x_j$. События $X = x_j$ ($j = 1, 2, \ldots$

..., m) образуют, очевидно, полную систему событий, так что $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 1$. Распределение случайной величины полностью определяет ее основные свойства — среднее значение, величину «разброса», наличие лишь одного или нескольких наиболее вероятных значений... В примере с кубиком распределение таково:

x_j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_j	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

А в схеме Бернулли случайная величина «число единиц» — обозначим ее z — имеет *биномиальное распределение*

$$\mathbf{P}(z = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Распределение случайной величины «оценка Феди на экзамене» из задачи 4 (обозначим ее Φ) задано таблицей или гистограммой рисунка 4.

Определение. *Средним значением* случайной величины X называется сумма

$$\mathbf{M}(X) = \sum_{i=1}^{N} w_i X(e_i) = w_1 X(e_1) + w_2 X(e_2) + \ldots + w_N X(e_N).$$

Зная распределение $\mathbf{P}(X = x_j) = u_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), эту формулу можно, собрав вместе слагаемые с одинаковыми значениями $X(e_i)$, переписать в виде

$$\mathbf{M}(X) = \sum_{j=1}^{m} u_j x_j = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_m x_m.$$

Среднее значение называют также *математическим ожиданием* случайной величины.

Среднее значение характеристической функции $\xi = \xi_A$ события A, принимающей только значения 0 и 1, равно вероятности события A:

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{P}(\xi = 0) \cdot 0 + \mathbf{P}(\xi = 1) \cdot 1 = \mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(A).$$

Среднее значение оценки Феди равно

$$\mathbf{M}(\Phi) \approx 0{,}0076 \cdot 5 + 0{,}0876 \cdot 4 + 0{,}312 \cdot 3 + 0{,}593 \cdot 2 \approx 2{,}51.$$

Среднее значение числа единиц в схеме Бернулли равно по определению

$$\mathbf{M}(Z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot k.$$

Подсчитаем эту сумму. Поскольку при $k \ge 1$

$$C_n^k \cdot k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

имеем

$$\mathbf{M}(Z) = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np \sum_{l=0}^{n-1} p^l (1-p)^{n-1-l}.$$

По формуле бинома Ньютона сумма $\sum_{l=0}^{n-1} p^l (1-p)^{n-1-l}$ равна $(p + (1-p))^n = 1$. Значит, среднее значение величины Z равно np.

Но гораздо проще считать это среднее значение при помощи следующего свойства

Теорема 1. *Среднее значение суммы $X+Y$ случайных величин X и Y равно сумме их средних:*

$$\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y).$$

Доказательство. По определению,

$$\mathbf{M}(X) = w_1 X(e_1) + w_2 X(e_2) + \ldots + w_N X(e_N), \tag{8}$$

$$\mathbf{M}(Y) = w_1 Y(e_1) + w_2 Y(e_2) + \ldots + w_N Y(e_N). \tag{9}$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$\mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y) = w_1 (X(e_1) + Y(e_1)) + w_2 (Xe(e_2) + Y(e_2)) + \ldots + w_N (X(e_N) + Y(e_N)) = \mathbf{M}(X+Y).$$

Разумеется, утверждение теоремы верно и для суммы нескольких случайных величин.

Чтобы применить его к нахождению $\mathbf{M}(Z)$, представим Z в виде суммы n случайных величин

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n,$$

где Z_j — значение j-й координаты строки $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Среднее значение каждого из n слагаемых равно

$$\mathbf{M}(Z_j) = p, \tag{10}$$

поэтому $\mathbf{M}(Z) = np$.

Для произведения средних не все так просто — не всегда математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий. Например, если случайная величина X принимает значения 1 и -1 с равными вероятностями $1/2$, то $\mathbf{M}(X) = 0$, а $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{M}(1) = 1$.

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых значений x_j и y_k события $X = x_j$ и $Y = y_k$ независимы, т.е.

$$\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) = \mathbf{P}(X = x_j)\mathbf{P}(Y = y_k).$$

Теорема 2. *Среднее значение произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению их средних значений:*

$$\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y).$$

Доказательство. Пусть величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а величина Y принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_l$. Обозначим $\mathbf{P}(X = x_j) = u_j$, $\mathbf{P}(Y = y_k) = v_k$. Тогда

$$\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) = u_j v_k,$$

так что

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) x_j u_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} u_j v_k x_j y_k = \sum_{j=1}^{m} u_j x_j \cdot \sum_{k=1}^{l} v_k y_k = \mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y).$$

Упражнения

31. Двое играют в такую игру. Если при броске кости выпадает 1 или 2, то первый выигрывает у второго 5 очков; в противном случае второй выигрывает у первого 2 очка. Для кого эта игра выгодна — для первого или для второго игрока?

32. Я доезжаю на работу обычно либо автобусом за 20 минут, либо троллейбусом за полчаса, причем автобусом езжу втрое чаще, чем троллейбусом. В виде исключения я раз в десять дней доезжаю на такси за 10 минут и раз в десять дней хожу пешком за 1 час. Сколько времени в день в среднем я трачу на дорогу?

33. Каждым ходом игрок бросает игральную кость и получает столько очков, сколько выпадет. К тому же, если выпадет шестерка, он бросает кость второй раз за тот же ход и получает дополнительно выпавшее число очков. Сколько в среднем очков игрок получает за ход?

34. Докажите, что если случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = aX + b$, где a и b — постоянные числа, то $\mathbf{M}(Y) = a\mathbf{M}(X) + b$.

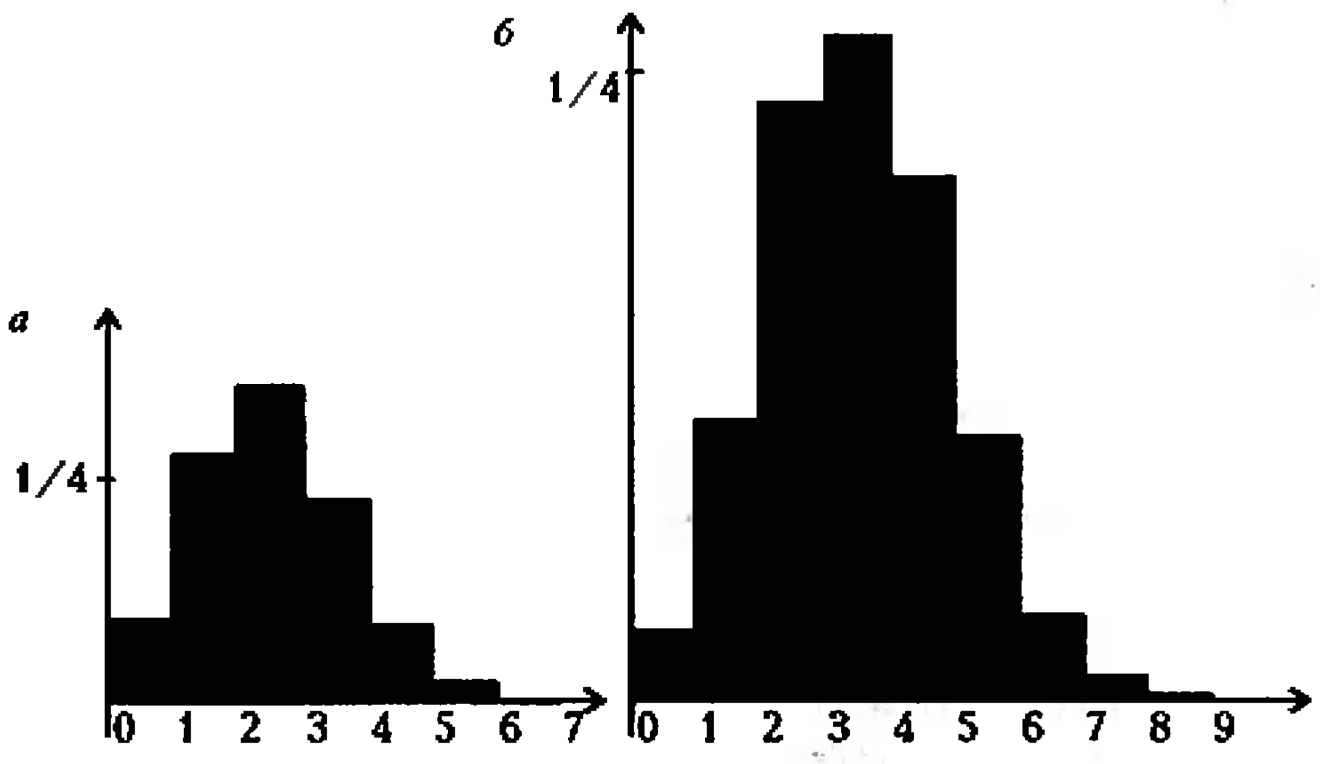


Рис. 7

35. Докажите, что если всегда $X \le Y$, то $\mathbf{M}(X) \le \mathbf{M}(Y)$.

36. Докажите, что если $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{M}(X)^2$, то X — постоянная величина.

37. Феде на экзамене задают а) 6; б) 9 вопросов, на каждый из которых он отвечает правильно с вероятностью $1/3$. Найдите вероятности, что он ответит правильно на k вопросов (соответствующие гистограммы изображены на рис.7, *а*,*б*).

Дисперсия и неравенство Чебышёва. Закон больших чисел

Кроме среднего значения $\mathbf{M}(X)$, случайная величина имеет другие характеристики. Если мы знаем, что в среднем за час на остановку приходит 10 автобусов, то отсюда еще не следует, что нам не придется ждать автобуса полчаса. Рассмотрим случайную величину $\hat{X} = X - \mathbf{M}(X)$ — отклонение X от математического ожидания (чем большие по модулю значения она имеет, тем больше « разброс» величины X).

Разумеется, математическое ожидание величины $\hat{X}$ равно 0. Математическое ожидание ее модуля может служить мерой разброса значений X. Но для математиков значительно более удобна другая характеристика, которую называют *дисперсией*:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}\left(\hat{X}\right)^2 = \mathbf{M}\left(X - \mathbf{M}(X)\right)^2.$$

Дисперсия — это *квадрат* «характерного уклонения» величины X от ее среднего значения. Чем меньше дисперсия, тем острее (уже) гистограмма распределения.

38. Докажите, что

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}(X)^2.$$

А теперь — самое замечательное свойство дисперсии.

Теорема 3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:*

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}(X) + \mathbf{D}(Y).$$

39. Докажите эту теорему.

Теорема 3 верна, конечно, и для суммы нескольких независимых случайных величин. Отсюда ясно, что для n одинаково распределенных независимых величин (например, для числа единиц схемы Бернулли) дисперсия их суммы равна $n\mathbf{D}$, где $\mathbf{D}$ — дисперсия одной величины. Значит, характерное уклонение суммы n случайных значений от ее математического ожидания равно $\sqrt{n\mathbf{D}}$ («закон корня из n»), тем самым, среднее арифметическое n значений отличается от вероятности p на величину порядка $\sqrt{\mathbf{D}}/\sqrt{n}$. На этом и строится доказательство закона больших чисел.

Докажите самостоятельно следующие утверждения:

40. Дисперсия величины Z схемы Бернулли равна $np(1-p)$.

Теорема 4. Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения, то для любого положительного числа ε выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(X \ge \varepsilon) \le \mathbf{M}(X)/\varepsilon.$$

Теорема 5. *Неравенство Чебышёва.* Для любого положительного числа ε и любой случайной величины X выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left(\hat{X} \ge \varepsilon\right) \le \mathbf{D}(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема 6. *Закон больших чисел.* Если случайная величина Y есть сумма n независимых случайных величин, у каждой из которых среднее значение равно a, а дисперсия D, то для любого положительного числа ε

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y}{n} - a\right| > \varepsilon\right) < \frac{D}{n\varepsilon^2}.$$

Последние теоремы типичны для теории вероятностей. Мы не можем наверняка утверждать, что результат опыта (случайная величина) или среднее арифметическое нескольких опытов отличается от истинного среднего — математического ожидания — не более чем на ε, но можем быть уверены, что вероятность большого отклонения мала. Основное содержание теории вероятностей — различные неравенства, позволяющие оценивать вероятности.

Давайте посмотрим, какую оценку дает неравенство Чебышёва для 400 бросаний симметричной монеты. Вероятность $\mathbf{P}$ того, что число выпадений цифры отличается от 200 более чем на 20, оценивается так:

$$\mathbf{P} < \frac{D}{400 \cdot (1/20)^2} = \frac{1/4}{400 \cdot (1/20)^2} = \frac{1}{4},$$

где значение $D = 1/4$.

На самом деле, существуют замечательные теоремы, позволяющие значительно точнее оценивать такие величины. Так, на последнем примере $\mathbf{P} \approx 0{,}05$. Но об этом мы поговорим в следующий раз.

Под каким углом отскочит мяч?

С.ХОРОЗОВ

В ОБЩЕМ случае задача формулируется так. Мяч подлетает к плоскому массивному телу (бетонная стена, горизонтальная асфальтированная площадка и т.п.) под некоторым углом. При этом мяч может вращаться с некоторой угловой скоростью вокруг произвольной оси. Под каким углом он отскочит?

Несколько сузим задачу — рассмотрим случай, когда ось вращения мяча перпендикулярна плоскости его падения на стену. Привычное «угол падения равен углу отражения» придется отбросить, если мы не хотим ограничиваться тривиальным случаем, когда трения нет. Решая задачу, будем предполагать, что составляющая скорости мяча, перпендикулярная стене, в процессе столкновения меняет только знак, но не меняет своей абсолютной величины, и что учет силы тяжести не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на ответ. Второе предположение вполне обоснованно: оценка времени отскока мяча дает несколько сотых долей секунды; это значит, что упругие силы в момент удара приблизительно на два порядка превосходят силу тяжести.

Обсудим сначала частный случай задачи: мяч со скоростью v_0 подлетает к стене под углом 90° к ее поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, параллельной стене. Пусть $N(t)$ — зависимость от времени силы упругой реакции стены. Время будем отсчитывать от момента, когда мяч пришел в соприкосновение со стеной. Если μ — коэффициент трения скольжения мяча по стене, то в момент времени t составляющая скорости мяча, параллельная стене, определяется формулой

$$v_x(t) = \frac{\mu}{m}\int_0^t N(t)\,dt,$$

где m — масса мяча. Зависимость от времени угловой скорости мяча дается формулой

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu R}{I}\int_0^t N(t)\,dt,$$

где R — радиус мяча, а I — его момент инерции (мы предполагаем, что удар не очень сильный и деформация мяча мала по сравнению с его радиусом). Записанные формулы справедливы только до момента времени τ, в который закончится проскальзывание мяча по поверхности стены, — ведь мы воспользовались законом, справедливым только для силы трения скольжения. Интуитивно ясно, что при малых значениях коэффициента трения μ проскальзывание может продолжаться в течение всего времени отскока (времени, в течение которого мяч находится в контакте со стеной), а при больших значениях μ проскальзывание может прекратиться, когда мяч еще прижат к стене. Это значит, что в момент времени τ, когда проскальзывание прекратилось,

$$v_x(\tau) = R\omega(\tau)$$

и мяч начинает просто катиться по стене. Потерями энергии мяча в процессе качения мы будем пренебрегать. Следовательно, начиная с момента времени τ, угловая скорость и x-составляющая скорости мяча постоянны. Подставив в последнее равенство выражения для v_x и ω, получим

$$\int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R}{\frac{\mu}{m}+\frac{\mu R^2}{I}}.$$

Запишем момент инерции мяча в виде $I = \gamma m R^2$, где $\gamma = 2/5$, если мяч сплошной и однородный, и $\gamma = 2/3$, если мяч — надутая воздухом массивная оболочка (например, футбольный мяч). Тогда

$$\int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R m\gamma}{\mu(\gamma+1)}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких случаях время проскальзывания τ меньше времени T контакта мяча со стеной и в каких случаях — больше. Условие, что проскальзывание прекратилось не позже, чем мяч перестал касаться стены, можно записать в виде

$$\int_0^T N(t)\,dt \ge \int_0^\tau N(t)\,dt,$$

или, поскольку левая часть есть просто изменение перпендикулярной к стене составляющей импульса мяча, которое, в соответствии со сделанным в начале предположением, равно $2mv_0$,

$$2mv_0 \ge \int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R m\gamma}{\mu(\gamma+1)}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \ge \frac{\omega_0 R\gamma}{2v_0(\gamma+1)} = \mu_к.$$

Если μ больше $\mu_к$ (критическое значение коэффициента трения), то время проскальзывания мяча по стене меньше времени T контакта мяча со стеной, а если μ не больше $\mu_к$, то проскальзывание будет длиться в течение всего соударения. При $\mu \ge \mu_к$ для составляющей скорости, параллельной стене, и угла отскока α_1 имеем

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{\omega_0 R\gamma}{v_0(\gamma+1)},\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega_0 R\gamma}{v_0(\gamma+1)},$$

а при $\mu \le \mu_к$

$$v_x = v_x(T) = 2\mu v_0,\ \operatorname{tg}\alpha_1 = 2\mu.$$

В частном случае, когда сплошной мяч (шар) катится по горизонтальной поверхности и сталкивается с вертикальной стеной, $\omega_0 R = v_0$ и $\mu_к = 1/7$, поэтому при $\mu \ge \mu_к$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{2}{7},\ \alpha_1 \approx 15{,}9°.$$

Мы получили интересное предсказание — независимо от массы, радиуса, скорости сплошного мяча и коэффициента трения его о поверхность стены угол отскока мяча не превосходит 16°.

Теперь рассмотрим, как и намеревались, более общий случай — мяч подлетает к стене под углом $\alpha_0 \ne 0$, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, перпендикулярной плоскости падения (рис.1). Будем по-прежнему считать

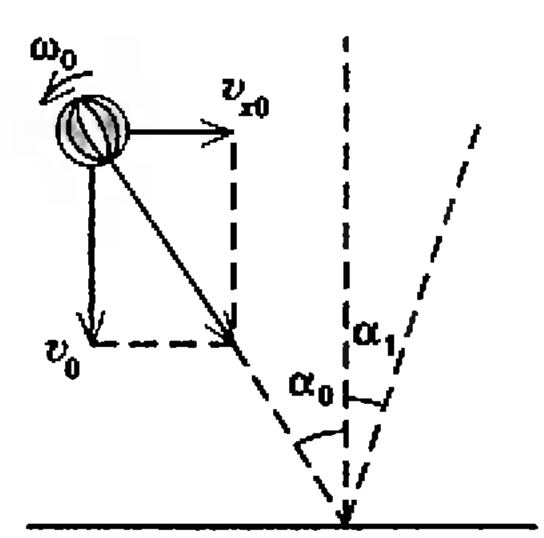


Рис. 1

составляющую скорости, перпендикулярную стене, равной v_0. Тогда составляющая начальной скорости, параллельная стене, равна $v_{x0} = v_0 \operatorname{tg}\alpha_0$.

Если мяч вращается против часовой стрелки, то по аналогии с рассмотренным частным случаем можно написать

$$v_x(t) = v_{x0} - \frac{\mu}{m}\int_0^t N(t)\,dt,$$

$$\omega(t) = -\omega_0 + \frac{\mu R}{I}\int_0^t N(t)\,dt.$$

Действуя так же, как и раньше, можно найти критическое значение коэффициента трения:

$$\mu_к = \frac{(v_{x0} + \omega_0 R)\gamma}{2v_0(\gamma+1)},$$

x-составляющую скорости мяча и угловую скорость его вращения после отскока при $\mu \geq \mu_к$:

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{v_{x0} - \omega_0 R\gamma}{\gamma+1},$$

$$\omega = \omega(\tau) = \frac{v_{x0} - \omega_0 R\gamma}{R(\gamma+1)}.$$

Мы не будем приводить соответствующие формулы для случая $\mu \leq \mu_к$ — при желании вы сможете вывести их сами.

Пришло время выяснить, насколько полученные нами формулы соответствуют опыту. Для этого было проделано два эксперимента.

Эксперимент 1. Мяч катится по горизонтальному столу со скоростью несколько метров в секунду, ударяется о вертикальную стену и отскакивает от нее (рис.2). Мяч — сплошной шар,

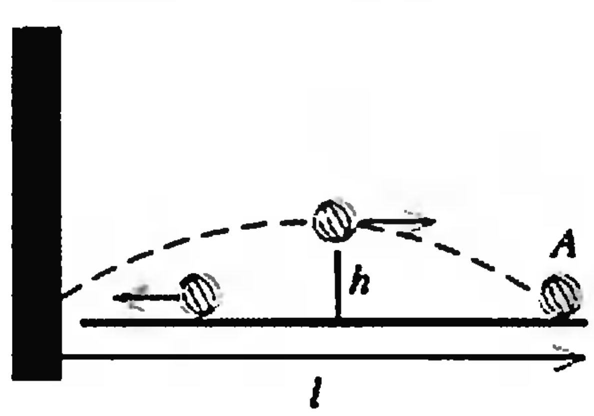


Рис. 2

обладающий очень хорошим отскоком (при падении без начальной скорости на твердое основание с высоты h он подпрыгивает на высоту, большую чем $0{,}8h$, т.е. его скорость меняется меньше чем на 10%). Диаметр мяча 3,5 см, край стола отодвинут от стены на 2,7 см. Отскочив от стены, мяч перелетает через планку, высота которой над столом может варьироваться. Планка располагается приблизительно посередине между стеной и точкой стола A, в которой мяч после отскока падает на стол.

Если расстояние от стены до точки A равно l и при этом мяч перелетел (с небольшим запасом) через планку, установленную на высоте h, то угол отскока α_1 находится из уравнения $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 4h/l$. В разных измерениях l изменялось в пределах 1—1,7 м. Результат: $\alpha_1 = 30°$, возможная ошибка: 1,5—2°.

Сразу бросается в глаза существенное расхождение между расчетом и результатом эксперимента. Если даже принять во внимание, что горизонтальная составляющая скорости за счет неидеально упругого столкновения уменьшается на 10%, то предсказание все равно драматически отличается от результатов эксперимента. Влияние щели между столом и стеной, которая оставлена, чтобы избежать одновременного взаимодействия мяча со стеной и столом, на угол отскока незначительно (меньше одного градуса). Неучтенный в расчете эффект силы тяжести мал, да к тому же он только уменьшил бы угол отскока. В чем же дело? Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, давайте посмотрим, насколько соответствует наш расчет второму эксперименту.

Эксперимент 2. Такой же, как и в эксперименте 1, мяч подвешен на тонкой нити длиной 130 см так, что он едва касается вертикальной стены в некоторой точке O. Мяч отводим от положения равновесия приблизительно на 60 см, устанавливаем над точкой, координаты которой относительно стены и точки O измерены, и отпускаем. Угол падения, следовательно, мы знаем. Для того чтобы измерить угол отражения, достаточно повторить опыт несколько раз и подобрать такое положение вертикального стерженька, чтобы мяч пролетел как раз над ним. Измерив координаты этого стерженька, можно найти угол отражения α_1 после первого отскока. Точно так же измеряется угол α_2 — угол отражения после второго удара о стену. Заметим, что, хотя крутящий момент нити невелик (нить тонкая), следует время от времени давать ей возможность раскрутиться.

Рассчитаем углы первого и второго отскоков мяча от стены. Перед столкновением со стеной мяч не вращался ($\omega_0 = 0$) и мяч сплошной ($\gamma = 2/5$), поэтому после первого столкновения

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{5}{7}\,\mathrm{tg}\,\alpha_0,\quad v_{x1} = \frac{v_{x0}}{\gamma+1},$$

$$\omega_1 = \frac{v_{x0}}{R(\gamma+1)}.$$

Отскочив от стены, мяч вскоре снова вернется к стене, изменив знак x-составляющей скорости, а направление его вращения, конечно, останется прежним. Для угла второго отскока получим

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{15}{49}\,\mathrm{tg}\,\alpha_0.$$

Численные значения рассчитанных и измеренных углов (в градусах) приведены в таблице:

α_0	α_1		α_2	
	рассчит.	экспер.	рассчит.	экспер.
58,2	49,0	42	26,2	–31
46	36,5	30	17,6	–20
30	22,4	21	10,0	–9

Знак «–» в последнем столбце означает, что мяч, подлетая к стене слева, отскакивает опять налево, хотя по расчету он должен отскочить направо (рис.3; здесь O — исходное положение мяча, $1_р$ и $2_р$ — рассчитанные направления первого и второго отскоков, $1_э$ и

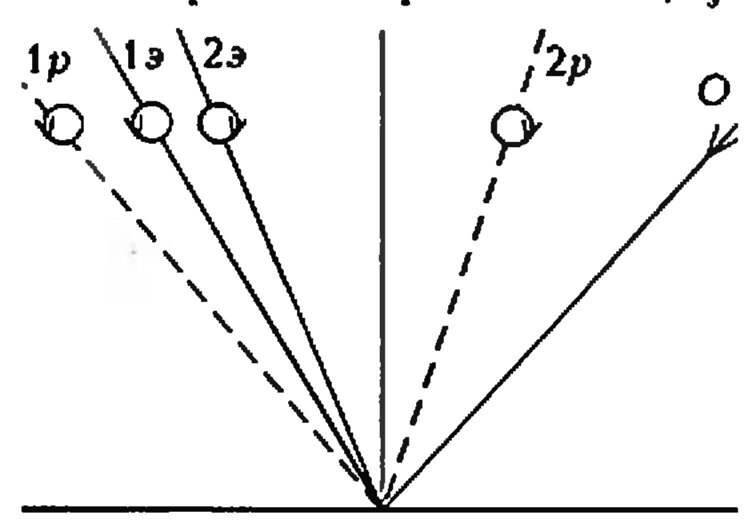


Рис. 3

$2_э$ — экспериментальные направления отскоков, стрелки — направления вращения мяча). Этот эффект нельзя объяснить ни неучтенным в расчете уменьшением нормальной к стене составляющей скорости (около 10%), ни предположением, что коэффициент трения меньше критического. (Нетрудно убедиться, что учет любого из этих эффектов только увеличит расхождение с опытом.) Так в чем же дело? Точного ответа, подкрепленного расчетом, у автора нет. Но все же обсудим вероятную причину расхождения.

Рассмотрим столкновение катящегося по столу мяча с вертикальной стеной (эксперимент 1). Начнем с вопроса: почему мы думаем, что проскальзывание мяча по поверхности стены неизбежно? Ответ: если бы проскальзывания не было, это означало бы, что мяч почти мгновенно получил вертикальную (вдоль поверхности стены) составляющую скорости, равную $\omega_0 R$, а это, в свою очередь, требует бесконечно большой силы трения, что нелепо. Этот ответ правилен, но только при условии, что мяч (шар) в процессе столкновения не имеет тангенциальных (направленных вдоль поверхности) деформаций. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим такой мысленный опыт. Имеется практически недеформируемое очень легкое кольцо. На него надето очень много маленьких (и очень легких) грузиков, соединенных невесомыми пружинками, которые без трения могут перемещаться по кольцу. Масса всей системы равна сумме масс грузиков. Кольцо, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, параллельной стене, подлетает к стене под углом 90° и сталкивается со стеной (все как с мячиком в эксперименте 1). Будут ли проскальзывать грузики по стене? Вовсе не обязательно. Точнее, время проскальзывания может оказаться во много раз меньше времени соударения кольца со стеной. Ведь сила реакции опоры, а следовательно, и сила трения определяются изменением нормальной к стене составляющей импульса очень большого числа грузиков, а остановить надо один или несколько грузиков, которые касаются стены. Это может произойти за очень малое по сравнению со всем временем отскока время. Остальные (не находящиеся в контакте со стеной) грузики продолжают двигаться по инерции, сжимая и растягивая соединяющие их с соседями пружинки. Это значит, что трение скольжения может быстро смениться трением покоя, и, следовательно, потери энергии вращения кольца на нагревание будут незначительными. За счет этой сэкономленной энергии кольцо в целом и приобретает большую, чем в случае недеформируемого и относительно долго проскальзывающего по стене кольца, вертикальную составляющую скорости.

Итак, гипотезу о причине расхождения «стандартного» решения задачи об угле отскока мяча с опытом можно сформулировать так: за счет тангенциальной деформации мяча в процессе удара о стену проскальзывание мяча прекращается существенно раньше, чем дают выведенные нами формулы, и значительная часть энергии вращения переходит в кинетическую энергию, связанную с составляющей скорости мяча вдоль стены. Попробуем проверить нашу гипотезу. Вычислим угол отскока мяча в условиях эксперимента 1, предполагая, что вся энергия вращения переходит в энергию вертикального движения. Из равенства $\frac{I\omega_0^2}{2}=\frac{mv_x^2}{2}$ получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{v_x}{v_0}=\sqrt{\frac{2}{5}},\ \text{и}\ \alpha_1\approx 32{,}3^\circ .$$

Этот результат немного больше экспериментально измеренного, что вполне естественно, так как кратковременное проскальзывание, видимо, все-таки есть. Во всяком случае, это довольно веский аргумент в пользу рассмотренной гипотезы.

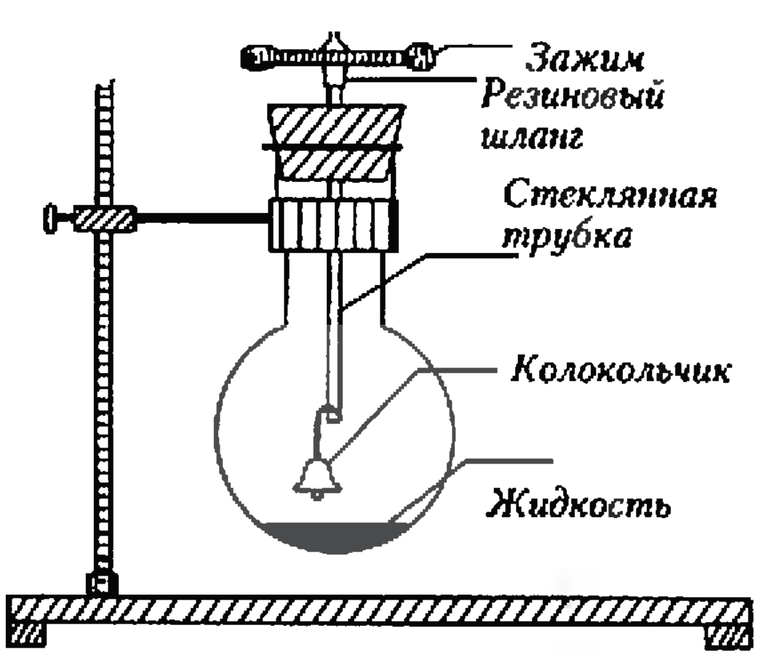
Стоит обратить внимание и на один любопытный результат в эксперименте 2 — мяч после второго отскока от стены вращается не против часовой стрелки, как можно было бы ожидать в «стандартной модели», а по часовой стрелке. Этот факт, по крайней мере на качественном уровне, тоже можно объяснить тангенциальными деформациями мяча в процессе удара о стену. Однако попыток сделать количественный расчет автор не предпринимал.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Звон колокольчика

Н.ПАРАВЯН

Самостоятельно или на занятиях физического кружка можно провести такой эксперимент. Соберите установку, изображенную на рисунке. В обычном металлическом штативе с помощью лапки *неплотно* укрепите широкогорлую круглодонную колбу емкостью 250 – 300 мл, плотно закрытую резиновой пробкой с проходящей сквозь нее стеклянной трубкой длиной 15 – 20 см. (Все эти приборы можно, например, взять на время из кабинета химии.) К нижнему концу трубки на



короткой нитке подвесьте маленький колокольчик — типа тех, что используют рыболовы-любители, — а на верхний конец трубки наденьте небольшой отрезок резинового шланга длиной 5 – 10 см, перекрытый зажимом. Налейте в колбу 20 – 25 мл воды. Вот наша экспериментальная установка и готова.

Выньте пробку вместе с трубкой и колокольчиком из горла колбы, а под дно колбы подставьте электрическую плитку с *закрытой* спиралью. (В крайнем случае можно использовать и обыкновенную спиртовку, но только внимательно проследите, чтобы во время нагревания колбы фитиль *ни в коем случае* не коснулся стенки колбы — она тут же лопнет!)

Нагревайте колбу, пока вода в ней не закипит, а минуты через три после этого плотно вставьте пробку с трубкой и колокольчиком обратно в колбу и быстро уберите нагреватель. Подождите, пока колба полностью не остынет, осторожно выньте колбу из штатива и слегка раскачайте ее. Вы услышите *очень слабый* звон.

Что ж, это понятно: при нагревании колбы с водой часть воздуха, вытесненная паром, ушла из нее, а после конденсации пара в герметически закрытой колбе образовался относительно невысокий вакуум (точнее — разреженная среда). Вот почему вы почти не слышали звучания колокольчика.

Теперь снимите зажим и через несколько секунд снова наденьте его. Раскачав колбу, вы услышите значительно усиленный звон колокольчика. Почему? Тоже понятно: мы впустили в колбу воздух, и плотность среды, проводящей звук, существенно увеличилась.

Продолжим эксперимент. Выньте из колбы пробку с колокольчиком, слейте остатки воды и вместо нее налейте 20 – 25 мл *безводного* глицерина или этиленгликоля. (Их тоже можно позаимствовать из кабинета химии.) У этих жидкостей плотность паров при комнатной температуре в несколько десятков раз меньше плотности паров воды. В результате разреженность среды в колбе будет еще выше, и, по идее, эксперимент должен дать еще лучший эффект. И действительно, звон колокольчика не будет слышен уже на расстоянии одного метра от колбы.

Решим относительно параметра

А. ЕГОРОВ

В ЭТОЙ статье пойдет речь об одном приеме, оказывающемся весьма плодотворным при решении задач с параметром. Такие задачи довольно часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, предъявляющие повышенные требования к математической подготовке абитуриентов. Большая часть разбираемых задач предлагалась на конкурсных экзаменах в такие вузы, как МГУ, МАИ, НГУ и др.

Как правило, решая задачу с параметром, мы рассматриваем его как некоторое произвольное, но фиксированное постоянное число и решаем уравнение, неравенство, систему относительно имеющихся неизвестных, учитывая естественно возникающие ограничения на значения параметра.

Однако в целом ряде случаев (например, при решении уравнений) бывает удобно рассматривать параметр как независимую переменную и решать уравнение относительно этой переменной.

Уравнения, квадратные относительно параметра

В следующих задачах требуется решать уравнение третьей и четвертой степени. В нашем распоряжении нет хороших формул для решения таких уравнений, а угадать корень и разложить на множители при наличии параметра не очень просто.

Однако бывает, что эти уравнения оказываются квадратными относительно параметра.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0.$$

Решение. Данное уравнение — квадратное относительно a:

$$a^2-a\left(x^2+x\right)+2x^3-2x^2=0,$$

его дискриминант

$$D=\left(x^2+x\right)^2-8x^3+8x^2=x^2(x-3)^2$$

— полный квадрат. Поэтому

$$a=\frac{x^2+x\pm x(x-3)}{2},$$

так что либо

$$a=x^2-x,$$

либо

$$a=2x,$$

т.е. либо $x=a/2$, либо $x=\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)/2$. Учитывая условия существования корней, получаем

Ответ. $x=a/2$ при $a<-1/4$; $x_1=-1/8$, $x_2=1/2$ при $a=-1/4$; $x_1=a/2$, $x_{2,3}=\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)/2$ при $a>-1/4$, $a\neq 0$, $a\neq 6$; $x_1=0$, $x_2=1$ при $a=0$; $x_1=-2$, $x_2=3$ при $a=6$.

Задача 2. *При каких a уравнение*

$$(x_2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$$

имеет три корня?

Решение. Мы снова имеем дело с квадратным относительно a уравнением:

$$a^2-2a\left(x^2-1\right)+x^4-6x^2+4x=0.$$

Вычисляя его дискриминант, получаем

$$\frac{D}{4}=\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-6x^2+4x\right)=(2x-1)^2,$$

поэтому либо

$$x^2-2x-a=0, \qquad (1)$$

либо

$$x^2+2x-2-a=0. \qquad (2)$$

Выясним, при каких a совокупность уравнений (1) и (2) имеет три решения.

Это возможно в трех случаях: одно из уравнений имеет один корень, а другое — два корня, отличных от корней первого уравнения; уравнения (1) и (2) имеют по 2 корня, один из которых — общий для этих двух уравнений.

Первое уравнение имеет один корень, когда

$$\frac{D}{4}=1+a=0,$$

т.е. при $a=-1$. При этом второе уравнение имеет корни $1\pm\sqrt{2}$.

Второе уравнение имеет один корень при $a=-3$, но при этом первое корней не имеет.

Наконец, если уравнения (1) и (2) имеют общий корень, то

$$x^2-2x=x^2+2x-2,$$

т.е. $x=1/2$, при этом $a=-3/4$.

Ответ. При $a=-1$ и $a=-3/4$.

В следующей задаче нет параметра. Однако удачное превращение данного уравнения в уравнение с параметром дает возможность найти решение. Правда, прием используется весьма искусственный — за параметр по существу принимается конкретное число.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0.$$

Решение. Заменив в уравнении $\sqrt{3}$ на a, получим квадратное относительно a уравнение

$$x^4-2ax^2+x+a^2-a=0,$$

т.е.

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+x^4+x=0.$$

Решая его относительно a, получаем

$$a=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2},$$

т.е. либо

$$x^2+x=a,$$

либо

$$x^2-x+1=a.$$

Подставляя $a=\sqrt{3}$, решаем полученные уравнения.

Ответ.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}.$$

Иррациональные уравнения с параметром

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

Решение. Избавление от радикалов приведет к уравнению четвертой степени относительно x. Поэтому попробуем решить уравнение относительно a.

Заметим, что $x\geq 0$. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+x^4-x=0,$$

решить которое мы должны при дополнительных ограничениях

$$x\geq 0 \text{ и } x^2\leq a.$$

Решая относительно a квадратное уравнение, получим

$$a=x^2+x+1$$

либо

$$a=x^2-x.$$

Первое из полученных уравнений противоречит ограничениям. Для его неотрицательных корней $x^2>a$ (поскольку $x\ge 0$).

Второе уравнение не имеет корней при $a<-1/4$, а при $-1/4\le a<0$ не имеет корней, удовлетворяющих исходному уравнению. При $a=0$ имеем $x=0$, а при $a>0$ единственным неотрицательным корнем, удовлетворяющим всем условиям, будет

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Ответ. $x=0$ при $a=0$; $x=\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$ при $a>0$; при $a<0$ корней нет.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$a^7+x=\sqrt[7]{a-x}.$$

Решение. Перепишем уравнение таким образом:

$$a=\sqrt[7]{\sqrt[7]{a-x}-x}.$$

При фиксированном x рассмотрим функцию

$$f(a)=\sqrt[7]{a-x}.$$

Наше уравнение, как нетрудно видеть, можно записать и так:

$$a=f(f(a)). \qquad (3)$$

При любом фиксированном x функция $y=f(a)$ является возрастающей.

Докажем, что уравнение (3) равносильно уравнению

$$a=f(a).$$

Прежде всего, всякий корень последнего уравнения является корнем уравнения (3); ибо если

$$a=f(a),$$

то

$$f(a)=f(f(a))$$

и, значит,

$$a=f(f(a)).$$

Пусть a_0 — корень уравнения (3), причем $a_0\ne f(a_0)$. Если $a_0>f(a_0)$, из возрастания функции следует, что

$$f(a_0)>f(f(a_0))=a_0,$$

т.е.

$$f(a_0)>a_0,$$

что противоречит нашему предположению.

Аналогично доказывается невозможность неравенства

$$a_0<f(a_0).$$

Итак, поскольку в нашем случае $a=f(a)$, получаем эквивалентное уравнение

$$a=\sqrt[7]{a-x},$$

откуда следует, что

$$x=a-a^7.$$

Ответ. $a-a^7$.

Вот еще одна задача без параметра, при решении которой вводится параметр.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5.$$

Решение. Пусть $y=\sqrt{45-2x}$. Тогда $x=\dfrac{45-y^2}{2}$ и уравнение приводится к виду

$$2\sqrt{35-2y}=35-y^2.$$

Возведение в квадрат приведет к жуткому уравнению четвертой степени.

Положим $35=a$ (решим уравнение относительно 35); тогда

$$2\sqrt{a-2y}=a-y^2;$$

решая относительно a, получаем либо

$$a=y^2+2y,$$

либо

$$a=y^2-2y-4,$$

т.е. два уравнения

$$y^2+2y-35=0,\ y^2-2y-39=0.$$

Первое из уравнений имеет корни -7 и 5, из которых годится только $y=5$. При этом $x=10$.

Квадрат неотрицательного корня второго уравнения больше 35, так что и он не удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x=10$.

Системы уравнений

Здесь мы разберем одну задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в НГУ.

Задача 7. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} y+z=(b+c)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),\\ x+z=(a+c)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),\\ x+y=(a+b)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

при $(a+b)(b+c)(a+c)\ne 0$.

Решение. Пусть $u=1/x+1/y+1/z$. Заметим, что $u\ne 0$. В самом деле, если $u=0$, то $x=y=z=0$, что невозможно.

Решим относительно параметров a, b, c систему

$$\begin{cases} (b+c)u=y+z,\\ (a+c)u=x+z,\\ (a+b)u=x+y. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получаем

$$(a+b+c)u=x+y+z. \qquad (4)$$

Последовательно вычитая из (4) уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} au=x,\\ bu=y,\\ cu=z. \end{cases} \qquad (5)$$

Если $abc=0$, система не имеет решений с ненулевыми x, y, z. Далее считаем, что $abc\ne 0$.

Из (5) следует, что

$$\frac{u}{x}=\frac{1}{a},\ \frac{u}{y}=\frac{1}{b},\ \frac{u}{z}=\frac{1}{c}$$

и

$$u\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=u^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};$$

если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0,$$

то

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

после чего без труда получаем

Ответ. $(au,\ bu,\ cu)$, где $u=\pm\sqrt{1/a+1/b+1/c}$ при $1/a+1/b+1/c>0$. При других (a, b, c) решений нет.

Задачи, связанные с неравенствами

Сказанное ранее вполне может быть отнесено и к решению неравенств.

Задача 8. *При каждом значении параметра* a, $|a|<2$, *решите данное не-*

равенство

$$x^4+2ax^3+a^2x^2-1\le 0.$$

Решение. Заметим, что $x=0$ является решением при любом a. Рассмотрим левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно a и попробуем выразить его корни через x, т.е. решим относительно a уравнение

$$f(a,x)=a^2x^2+2ax^3+x^4-1=0.$$

Получаем

$$a=\frac{-x^3\pm\sqrt{x^6-x^6+x^2}}{x^2}=\frac{-x^3\pm x}{x^2},$$

т.е.

$$a=-\frac{x^2+1}{x} \text{ или } a=-\frac{x^2-1}{x}.$$

Это дает возможность разложить на множители квадратный трехчлен $f(a,x)$:

$$f(a,x)=x^2\left(a+\frac{x^2+1}{x}\right)\left(a+\frac{x^2-1}{x}\right)=$$

$$=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+ax-1\right).$$

Осталось решить неравенство

$$\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+ax-1\right)\le 0.$$

Первый множитель положителен при всех x (напомним, что $|a|<2$), так что исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$x^2+ax-1\le 0.$$

Находим корни уравнения

$$x^2+ax-1=0,$$

после чего получаем

Ответ.

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}\le x\le\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Мы решили исходное неравенство, ограничив значения параметра условием $|a|<2$, для того чтобы не загромождать решение техническими деталями. Настоятельно рекомендуем читателям решить эту задачу, как и следующую, без ограничений на a, т.е. при всех вообще a.

Задача 9. *Для каждого неотрицательного a решите неравенство*

$$16a^3x^4+8a^2x^2+16x+a+4\ge 0.$$

Решение. При $a=0$ неравенство справедливо при $x\ge -1/4$. Многочлен в левой части — кубический по a и четвертой степени по x. Выполнив замену $y=2ax$ при $a\ne 0$, получаем

$$\frac{y^4}{a}+2y^2+\frac{8y}{a}+a+4\ge 0,$$

или ($a>0$!)

$$a^2+2a\left(y^2+2\right)+y^4+8y\ge 0.$$

Неравенство стало квадратичным относительно a!

Действуем, как при решении предыдущей задачи:

$$a^2+2a\left(y^2+2\right)+y^4+8y=0,$$

имеем

$$a=-\left(y^2+2\right)\pm\sqrt{\left(y^2+2\right)^2-y^4-8y}=$$

$$=-\left(y^2+2\right)\pm(2y-2),$$

т.е.

$$a=-y^2+2y-4$$

либо

$$a=-y^2-2y.$$

Неравенство приводится к виду

$$\left(y^2-2y+a+4\right)\left(y^2+2y+a\right)\ge 0.$$

При $a>0$ первый сомножитель положителен. Осталось решить неравенство

$$y^2+2y+a\ge 0$$

и перейти к переменной x.

Ответ. $[-1/4;+\infty)$ при $a=0$;

$$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{1-a}+1}{2a}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{1-a}-1}{2a};+\infty\right)$$

при $0<a<1$; $(-\infty;+\infty)$ при $a\ge 1$.

Задачи, связанные с исследованием функций

Задача 10. *При каких значениях a неравенство*

$$5a-5+\sin^2x+a(3-\cos x)^3>0$$

выполняется при всех x?

Решение. Перепишем неравенство:

$$a\left(5+(3-\cos x)^3\right)>5-\sin^2x.$$

Так как коэффициент при a положителен, оно эквивалентно такому:

$$a>\frac{5-\sin^2x}{5+(3-\cos x)^3}.$$

Правая часть есть дробь, числитель которой максимален при $\sin x=0$, а знаменатель минимален при $\cos x=1$, т.е. при $x=2k\pi$. Подставляя эти значения x, получаем $a>5/13$.

Ответ. $a>5/13$.

Задача 11. *При каких значениях a функция*

$$y=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой?

Решение. Мы должны выяснить, при каких a производная данной функции положительна при всех x. Иначе говоря, при каких a неравенство

$$8a-6a\cos 6x-7-5\cos x>0$$

выполняется при всех x. Решая неравенство относительно a, получаем эквивалентное неравенство .

$$a>\frac{7+5\cos 5x}{8-6\cos 6x}.$$

Числитель дроби в правой части принимает максимальное значение, если $\cos 5x=1$, а знаменатель минимален при $\cos 6x=1$. При $x=2\pi k$ и $\cos 5x=1$, и $\cos 6x=1$, так что

$$a>\frac{12}{2}=6.$$

Ответ. $a>6$.

В следующих задачах существенно используются свойства квадратичных функций.

Задача 12. *Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству*

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$$

хотя бы при одном значении $a\in[-2;1]$.

Решение. Левая часть неравенства — кубический многочлен относительно x и квадратный трехчлен относительно a:

$$f(a)=a^2+a\left(x^3-2x^2+4\right)+$$

$$+2x^3-x^2-6x-5.$$

Для того чтобы квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 1 был положителен хотя бы при одном значении аргумента, принадлежащем некоторому отрезку, необходимо и достаточно, чтобы его значение хотя бы в одном из концов отрезка было положительно. В самом деле, если функция

$$y=f(t)=t^2+pt+q$$

неположительна на концах отрезка $[\alpha;\beta]$, т.е. $f(\alpha)\le 0$ и $f(\beta)\le 0$, то $f(t)\le 0$ при всех $t\in[\alpha;\beta]$. Если же, скажем, $f(\alpha)>0$, то $f(t)>0$ в точках отрезка, достаточно близких к α. Аналогично, если $f(\beta)>0$, то и $f(t)>0$ в точках, достаточно близких к β.

Итак, искомые значения x удовлетворяют совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3>0,\\ x^3-x^2-2x>0,\end{array}\right.$$

решая которую, получаем

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Задача 13. *Укажите все точки плоскости $(x; y)$, через которые не проходит ни одна из кривых семейства*

$$y=p^2+(4-2p)x-x^2.$$

Решение. Уравнение кривой является квадратным относительно p:

$$p^2-2px+4x-x^2-y=0.$$

Если через точку $(x_0; y_0)$ проходит хотя бы одна кривая, то это уравнение имеет корни и, следовательно, дискриминант его — а это функция от x и y — неотрицателен. Искомые же точки удовлетворяют условию $D<0$.

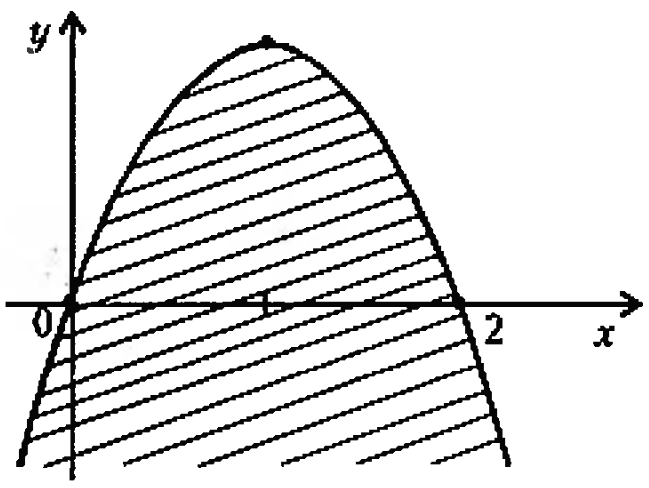


Рис. 1

Вычисляя дискриминант (точнее, $D/4$), получаем неравенство

$$x^2-4x+x^2+y<0,$$

откуда

$$y<4x-2x^2.$$

Итак, все удовлетворяющие условию точки лежат под параболой $y=4x-2x^2$ (рис.1).

Исследование уравнений средствами анализа

Сейчас мы обсудим задачи, сравнительно далекие от задач вступительного экзамена. Однако надеемся, что наших читателей методы их решения могут заинтересовать.

Задача 14. *Для каждого значения параметра a выясните, сколько корней имеет уравнение*

$$x^3-ax+2=0.$$

Решение. Выразим a через x:

$$a=\frac{x^3+2}{x}=x^2+\frac{2}{x}$$

и исследуем функцию в правой части с помощью производной:

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}.$$

Мы видим, что функция убывает при $x<0$ и $0<x<1$, возрастает при $x\ge1$ и имеет при $x=1$ локальный минимум. Построив ее график (рис.2),

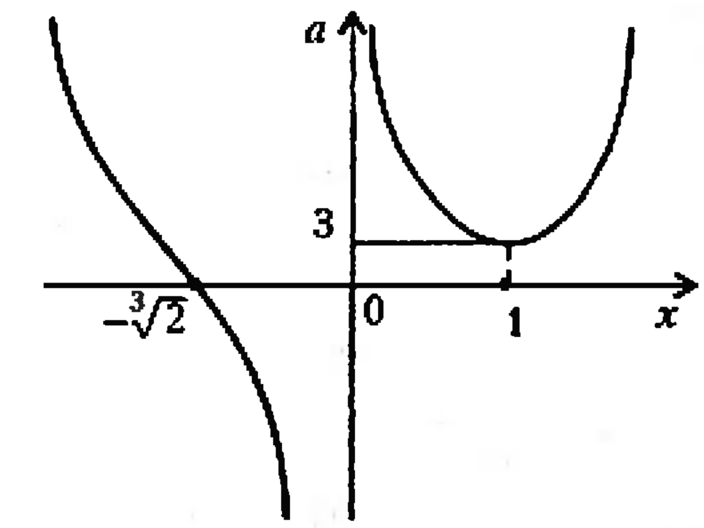


Рис. 2

видим, что при $a<3$ уравнение имеет один корень, при $a=3$ — два корня, при $a>3$ — три корня.

Задача 15. *При каких значениях a имеет корень уравнение*

$$\log_a x=x$$

(иначе говоря, при каких основаниях системы логарифмов существуют числа, равные своему логарифму)?

Решение. Ясно, что $a>0$, $a\ne1$ и уравнение эквивалентно такому:

$$\frac{\ln x}{\ln a}=x,$$

или

$$\ln a=\frac{\ln x}{x}.$$

Исследуем функцию, стоящую в правой части уравнения. При $x\to+\infty$ имеем $\frac{\ln x}{x}\to0$, а так как

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x},$$

функция убывает при $1-\ln x<0$, т.е. при $x>e$, возрастает при $0<x<e$, так

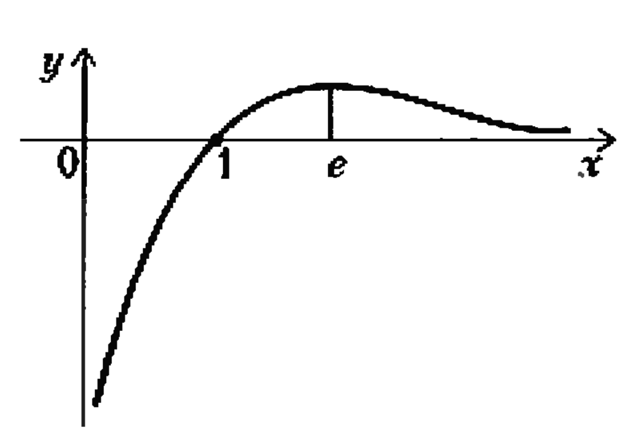


Рис. 3

что график ее имеет вид, показанный на рисунке 3, а уравнение имеет корень при $\ln a\le 1/e$, т.е. при $1<a\le e^{1/e}$ и $0<a<1$.

Ответ. $0<a<1$, $1<a\le e^{1/e}$.

В заключение рекомендуем прорешать следующие задачи.

Упражнения

1. Решите уравнения

а) $ax^3+\left(a^2-2\right)x^2-ax-2=0$;

б) $\left(8a^2+1\right)\sin^3 x-\left(4a^2+1\right)\sin x+2a\cos^3 x=0$;

в) $x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$;

г) $\sqrt{a+\sqrt{a-x}}=x$;

д) $\frac{a^3+x^3}{2}=\sqrt[3]{2a-x^3}$.

2. При каких значениях a уравнение

$$\left(2x^2-a\right)^2-24x^2+16x+4a=0$$

имеет а) три корня; б) четыре корня?

3. При каких значениях a уравнение

$$4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8=0$$

имеет два корня?

4. Решите системы уравнений

а) $\begin{cases}\frac{a}{x}-\frac{b}{z}+xz=c,\\ \frac{b}{y}-\frac{c}{x}+xy=a,\\ \frac{c}{z}-\frac{a}{y}+yz=b;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y^2=bx+ay-cz,\\ y^2+z^2=-ax+cy+bz,\\ z^2+x^2=cx-by+az.\end{cases}$

5. Решите неравенство

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\ge0$$

для каждого $a\ge0$.

6. На плоскости $(x; y)$ укажите все точки, через которые проходит хотя бы одна кривая семейства

$$y=p^2+(2p-1)x+2x^2.$$

7. Изобразите часть плоскости, покрываемую всевозможными кругами вида

$$(x-a)^2+(y-a)^2\le2+a^2.$$

8. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left(p-x^2\right)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\le1$.

9. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$$

выполняется при всех x.

10. Найдите все значения a, при которых функция

$$y(x)=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5$$

убывает и не имеет критических точек ни при каких x.

11. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+5+4a-a^2<0$$

хотя бы при одном значении $a\in[-1;2]$.

12. Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения

а) $ax^3-x+2=0$;

б) $(x+1)^4=ax^3$;

в) $e^x=ax$;

г) $e^x=ax^2$.

Интерференция света

Ю.ЧЕШЕВ

ВОПРОС о том, что такое свет, волновал человечество еще со времен Аристотеля, Лукреция и Демокрита. По мере накопления фактов, касающихся природы света, возникали различные теории, которые в конечном итоге сводились к двум концепциям: корпускулярной и волновой. Убедительным доказательством волновой природы световых явлений стали экспериментальные работы по интерференции Т.Юнга (начало XIX в.).

Прежде чем перейти к самому опыту Юнга, рассмотрим вопрос о представлении света в виде бегущих волн. Любой волновой процесс характеризуется амплитудой волны A, частотой ω, длиной волны λ, так что волну, бегущую вдоль какого-либо выбранного направления r, можно представить в виде

$$u = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \varphi\right).$$

Здесь u — колеблющаяся величина, частота ω определяет ее изменение во времени в заданной точке пространства, величина $2\pi/\lambda$ отвечает за изменение величины u вдоль направления распространения волны в фиксированные моменты времени, φ — некая постоянная величина, называемая начальной фазой колебаний.

При наложении двух (или нескольких) бегущих волн одинаковых частот может наблюдаться явление интерференции — усиление колебаний в одних точках пространства и ослабление в других. При этом интерференционная картина будет устойчивой, если за время наблюдения разность фаз колебаний от разных источников остается неизменной. Такие колебания называются когерентными. Именно в связи с требованием когерентности все интерференционные опыты со светом, как правило, проводятся не с двумя разными источниками, а с одним, свет от которого каким-либо образом разделяется на два потока.

Рассмотрим несколько конкретных задач на интерференцию света.

Задача 1 (Опыт Юнга). *Свет от точечного монохроматического источника S с длиной волны λ падает на экран M, в котором просверлены маленькие отверстия S_1 и S_2 (рис.1). На расстоянии L от экрана M перпендикулярно оси симметрии OO' расположен экран Э, на котором наблюдается интерференционная картина. Расстояние между отверстиями S_1 и S_2 равно d. Считая $d \le L$, определите положение максимумов и минимумов интенсивности вдоль экрана Э, а также ширину интерференционных полос.*

Проделав два отверстия в экране M, мы создали два когерентных источника света S_1 и S_2 (рис.2). Согласно принципу Гюйгенса, эти отверстия можно рассматривать как вторичные источники, излучающие свет в виде двух монохроматических пучков. Интерференция возникает в той части экрана Э, где эти пучки перекрываются. В нашем случае этой областью является отрезок CD. Пусть P — точка наблюдения интерференции, расположенная на отрезке CD на расстоянии x от оси симметрии OO', проходящей через середину отрезка S_1S_2 перпендикулярно к нему и экрану Э, так что $x = PK$. Проведем в точку P из S_1 и S_2 лучи S_1P и S_2P. Длины этих отрезков определяют длины оптических путей от вторичных источников:

$$l_1 = S_1P = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + L^2},$$

$$l_2 = S_2P = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2 + L^2}.$$

Запишем уравнение бегущей волны, пришедшей в точку наблюдения P от каждого из источников:

$$u_1 = A_1\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1 + \varphi_1\right),$$

$$u_2 = A_2\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_2 + \varphi_2\right).$$

В силу симметрии задачи относительно оси OO', получаем $A_1 = A_2 = A$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Таким образом, наложение колебаний u_1 и u_2 дает суммарное колебание

$$u = u_1 + u_2 = 2A\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(l_1 - l_2)\right) \times \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(l_1 + l_2) + \varphi\right).$$

Обозначив

$$B = 2A\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(l_1 - l_2)\right),$$

для результирующего поля волны в точке P имеем

$$u = B\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(l_1 + l_2) + \varphi\right).$$

Реально на экране Э наблюдается интенсивность волнового поля, равная квадрату волнового поля, усредненно-

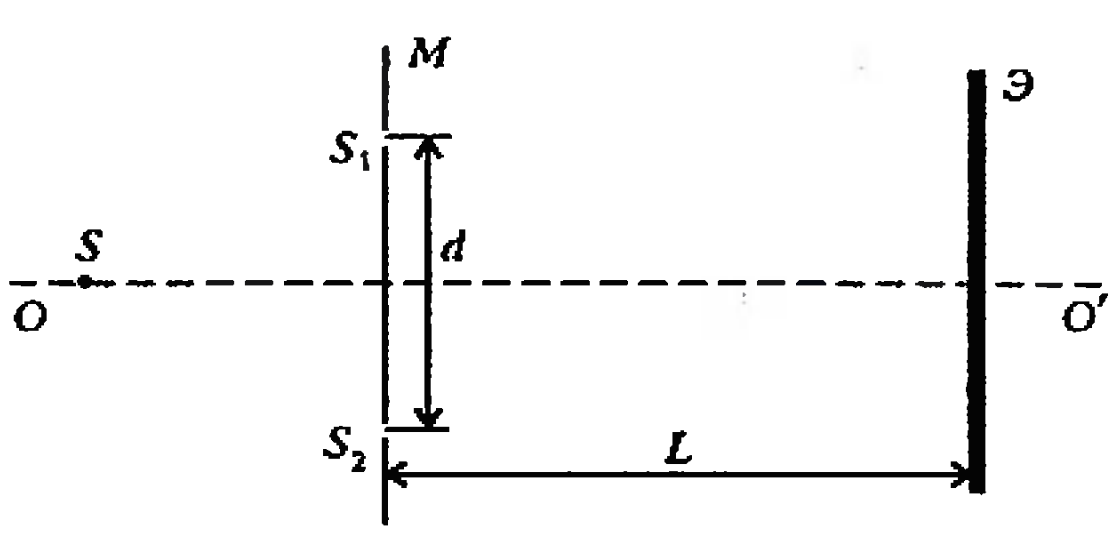


Рис. 1

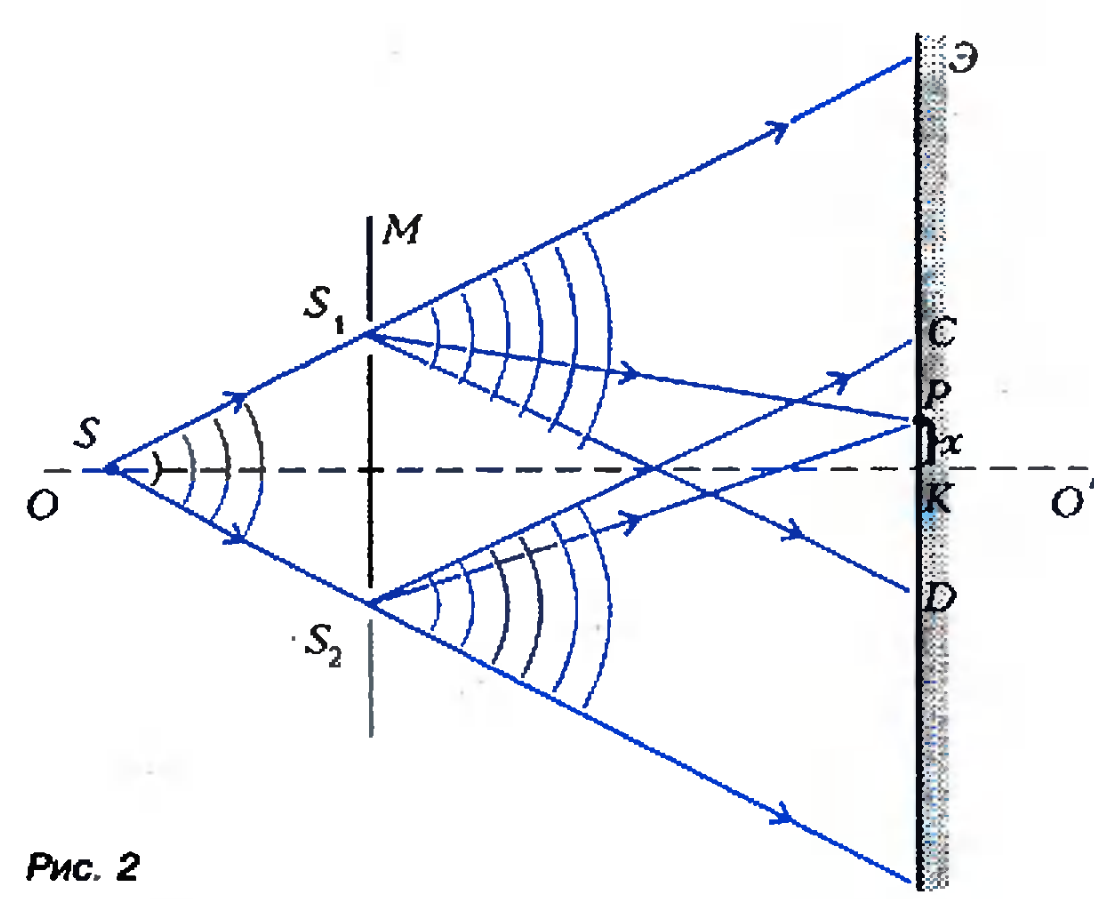


Рис. 2

му по времени, т.е.

$$2A^2\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(l_1-l_2)\right)=2A^2\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta l\right),$$

где $\Delta l = l_1 - l_2$ называется разностью хода лучей S_1P и S_2P. Максимумы интенсивности будут наблюдаться, когда разность хода равна целому числу длин волн:

$$\frac{\pi}{\lambda}\Delta l_{max} = k\pi, \text{ или } \Delta l_{max} = k\lambda.$$

Соответственно для минимумов разность хода равна нечетному числу полуволн:

$$\frac{\pi}{\lambda}\Delta l_{min} = \frac{2k-1}{2}\pi, \text{ или } \Delta l_{min} = \frac{2k-1}{2}\lambda.$$

Здесь k пробегает целые значения (k = 1, 2, 3,...). Из выражений для l_1 и l_2 имеем

$$l_1^2 - l_2^2 = 2xd, \text{ или } l_1 - l_2 = \frac{2xd}{l_1+l_2}.$$

Принимая во внимание, что $d \ll L$, можно положить

$$l_1 + l_2 = 2L$$

и, следовательно,

$$\Delta l = \frac{2xd}{2L} = \frac{xd}{L}.$$

Используя условия для минимумов и максимумов интенсивности, получим

$$x_{max} = \frac{\lambda L}{d}k, \quad x_{min} = \frac{\lambda L}{2d}(2k-1)$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Ширина интерференционной полосы равна расстоянию между двумя минимумами (или максимумами):

$$\Delta = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{d/L} = \frac{\lambda}{\psi},$$

где ψ угол, под которым видны источники S_1 и S_2 из центра экрана Э (точка K). В самом деле,

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2} = \frac{d}{2L},$$

откуда

$$\psi = \frac{d}{L}, \text{ и } \Delta = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Эти соотношения имеют большое значение и используются практически во всех экспериментах по интерференции.

Задача 2. *При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис.3) пучки монохроматического света с длиной волны λ = 6000 Å, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии L от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Определите также ширину интерференционных полос. Расстояние между вершинами бипризмы a = 4 см, показатель преломления материала бипризмы n = 1,4, преломляющий угол $\alpha = 10^{-3}$ рад. Считать угол α малым, так что $\alpha = \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.*

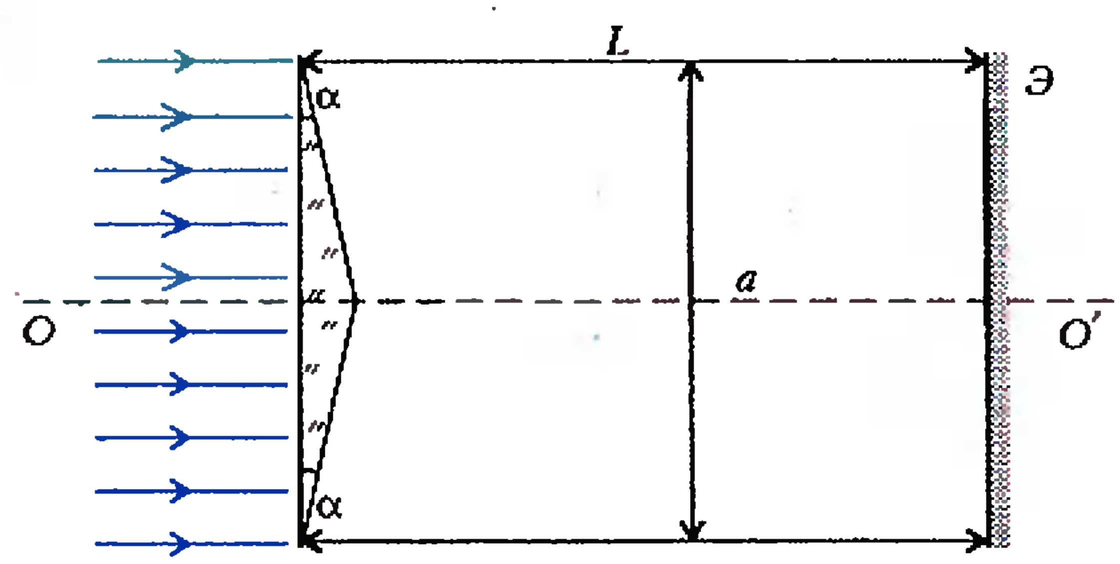


Рис. 3

Рассмотрим луч света, падающий на бипризму (рис.4). При условии малости угла α для угла отклонения светового луча θ имеем (см., например, «Квант», 1995, №4, с.52)

$$\theta = \alpha(n-1).$$

Следовательно, две половинки бипризмы создают два параллельных когерентных пучка плоских световых волн, идущих под равными углами θ к линии OO' (оси симметрии). Точка B — крайняя, дальше которой пучки света не перекрываются, поэтому интерференция будет наблюдаться на экране, расположенном левее точки B. Из геометрии (см. рис.4) легко находим искомое расстояние:

$$L = \frac{a}{2\operatorname{tg}\theta} = \frac{a}{2\theta} = \frac{a}{2\alpha(n-1)} = 50 \text{ м}.$$

Ширину интерференционной полосы определим из последнего соотношения задачи 1, где ψ — угловой размер источников. В нашем случае источники мнимые и расположены на очень большом расстоянии от экрана Э. Их угловой размер $\psi = 2\theta$. Тогда для ширины интерференционных полос получим

$$\Delta = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} = 0{,}075 \text{ см}.$$

Задача 3. *Точечный источник монохроматического света S с длиной волны λ = 6000 Å расположен между двумя неподвижными плоскопараллельными зеркалами, расстояние между которыми b = 3 см (рис.5). На удаленном расстоянии L = 1м от источника расположен экран $Э_1$, на котором наблюдается интерференционная картина, создаваемая двумя пучками света, отраженными от зеркал. Прямой пучок света от источника перекрывается экраном $Э_2$. В плоскости экрана $Э_1$ симметрично относительно зеркал расположен приемник П, сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Размер приемника мал по сравнению с шириной интерференционных полос на экране $Э_1$. Учитывая только однократные отражения света от зеркал, определите частоту переменного сигнала, регистрируемого приемником, который возникает при движении источника в направлении, перпендикулярном зеркалам, со скоростью v = 0,1 мм/с. Указание: при $\beta \ll 1$ считать $\sqrt{1+\beta} = 1 + \beta/2$.*

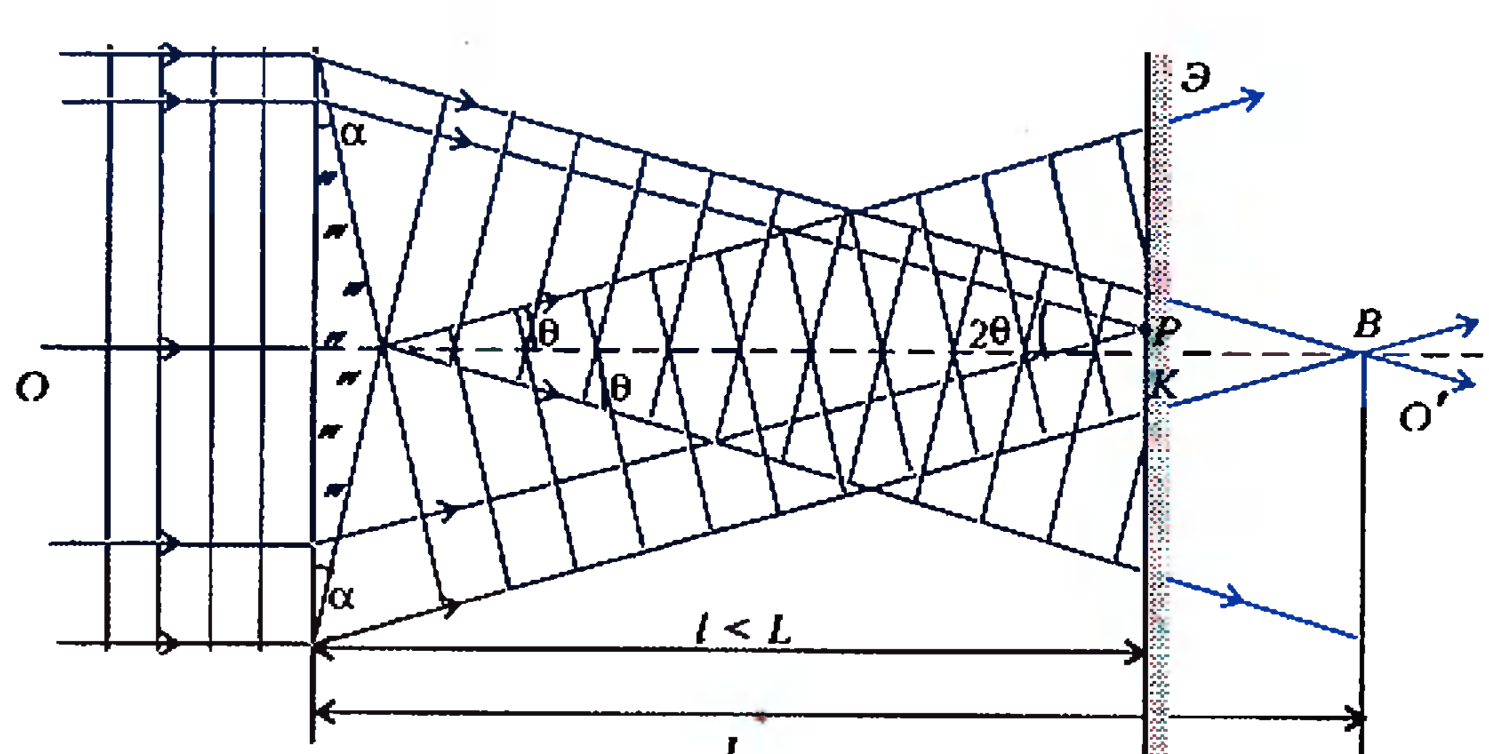


Рис. 4

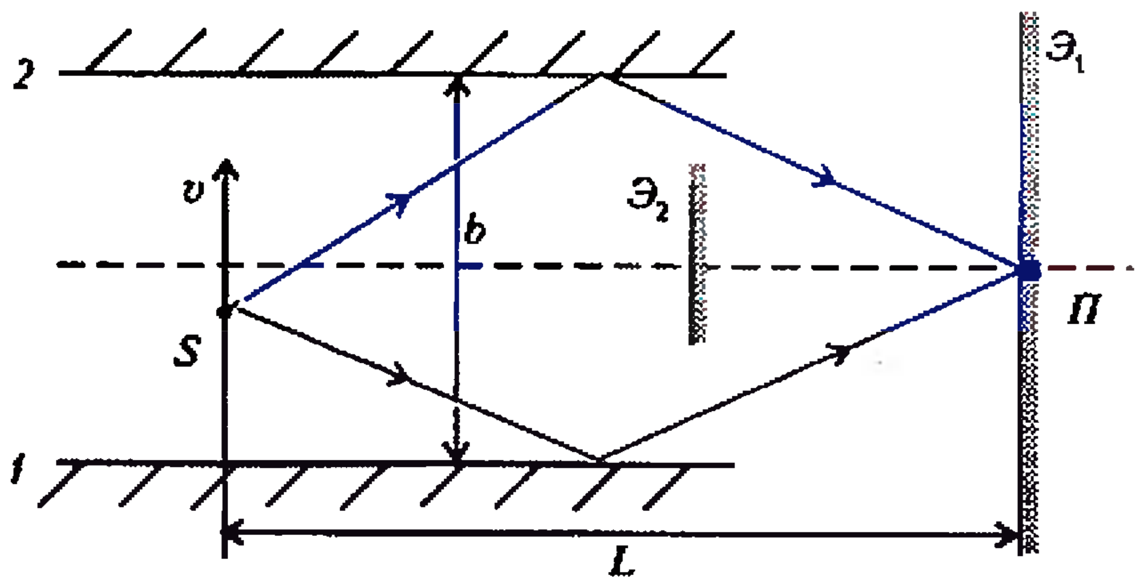


Рис. 5

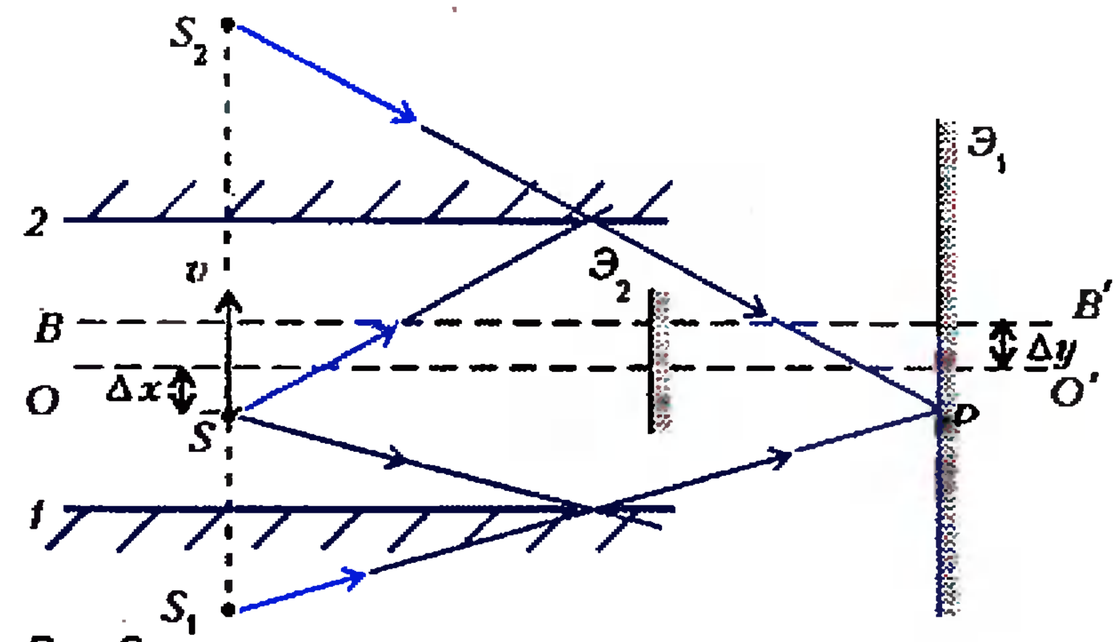


Рис. 6

В этой задаче речь идет об интерференции от двух мнимых источников S_1 и S_2, даваемых источником S в зеркалах 1 и 2 соответственно (рис.6). Если OO' — ось симметрии экспериментальной установки, Δx — расстояние от источника S до этой оси, то легко видеть, что расстояние между S_1 и S_2 равно

$$S_1S_2 = 2\left(\frac{b}{2} - \Delta x\right) + 2\left(\frac{b}{2} + \Delta x\right) = 2b.$$

Считая скорость перемещения источника S много меньшей скорости света и воспользовавшись формулой для ширины интерференционных полос, получим

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2b/L} = \frac{\lambda L}{2b}.$$

В свою очередь, Δy — это расстояние от оси BB', проходящей параллельно оси OO' через середину отрезка S_1S_2, т.е.

$$\Delta y = b - \Delta x - 2\left(\frac{b}{2} - \Delta x\right) =$$

$$= b - \Delta x - b + 2\Delta x = \Delta x = \upsilon\Delta t.$$

Таким образом,

$$\upsilon\Delta t = \frac{\lambda L}{2b},$$

где Δt — период колебаний интенсивности в точке P. Частота изменения интенсивности сигнала в точке приема равна

$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{2\upsilon b}{\lambda L} = 10 \text{ Гц}.$$

Задача 4. *В целях борьбы с потерями при отражении света от поверхности оптического прибора (линзы) используется метод просветления оптики, суть которого заключается в том, что на поверхность стекла линзы напыляется слой постороннего вещества с таким показателем преломления и такой толщины, чтобы минимизировать отраженные от линзы волны. Оцените толщину нанесенного покрытия, если используется стеклянная линза с показателем преломления $n_1 = 4/3$, а показатель преломления напыляемого вещества $n_2 = 5/4$. Фотографирование объекта ведется на длине волны $\lambda = 600$ нм.*

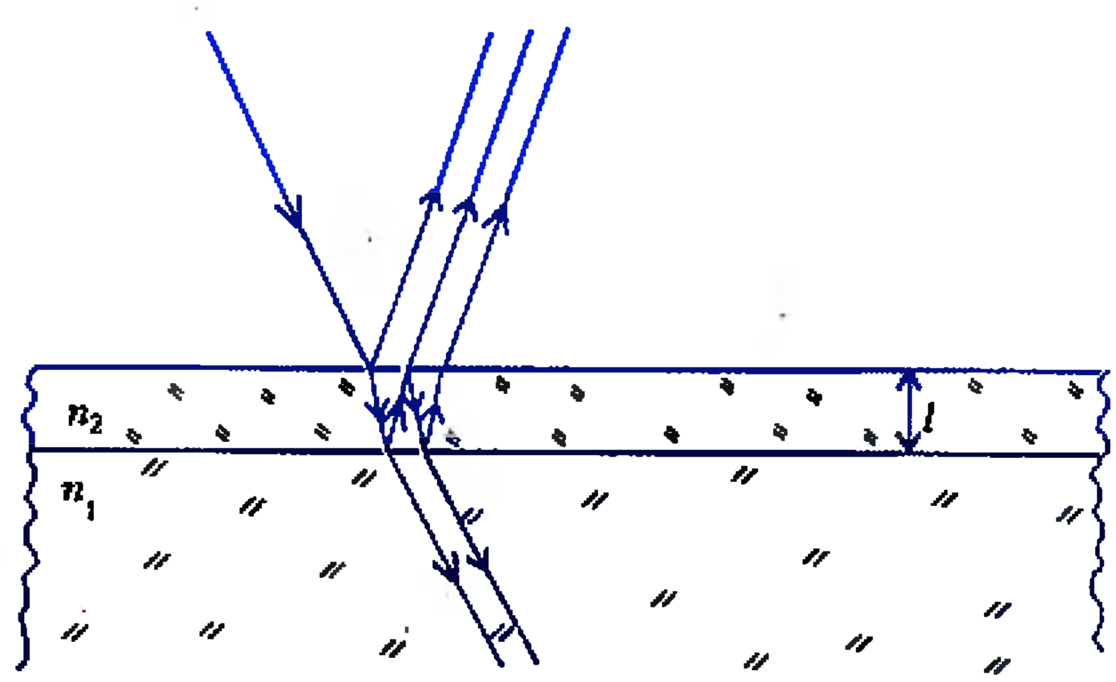


Рис. 7

Пусть на линзу перпендикулярно ее поверхности падает плоская волна (рис.7). Толщину l напыленного вещества требуется подобрать так, чтобы лучи, отраженные от верхней и нижней границ этого слоя, благодаря интерференции, взаимно погасились. (При этом показатель преломления выбирается таким, чтобы интенсивности этих лучей были близки между собой.) При учете отражений только первого порядка в произвольной точке, расположенной на некотором расстоянии от линзы, имеет место интерференция двух лучей с разностью хода

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda/n_2} l + \frac{2\pi}{\lambda/n_2} l = \frac{4\pi l}{\lambda} n_2.$$

Используя выражение для минимизации отраженных волн (см. задачу 1), имеем

$$\frac{4\pi l}{\lambda} n_2 = (2k-1)\pi,$$

где k — любое целое число. Тогда для минимальной толщины слоя ($k = 1$) получаем

$$l_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = 120 \text{ нм}.$$

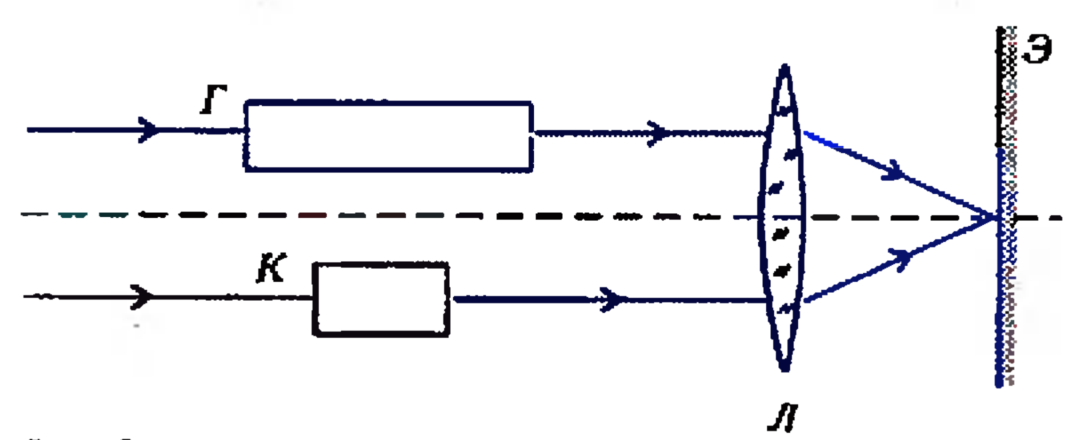


Рис. 8

Упражнения

1. Интерферометр Рэлея (рис.8) используется для точного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей ставится кювета $Г$ прямоугольной формы и длиной $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого — стеклянный компенсатор K, с помощью которого добиваются, чтобы в центральном максимуме разность хода между интерферирующими лучами равнялась нулю. Чему равен показатель преломления газообразного азота, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина в плоскости наблюдения сместилась ровно на одну полосу в сторону, что соответствовало увеличению показателя преломления? Показатель преломления воздуха $n_в = 1{,}000292$. Измерения проводились на длине волны света $\lambda = 500$ нм.

2. В интерференционной схеме пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 5000$ Å падает под углом $\alpha = 60°$ на

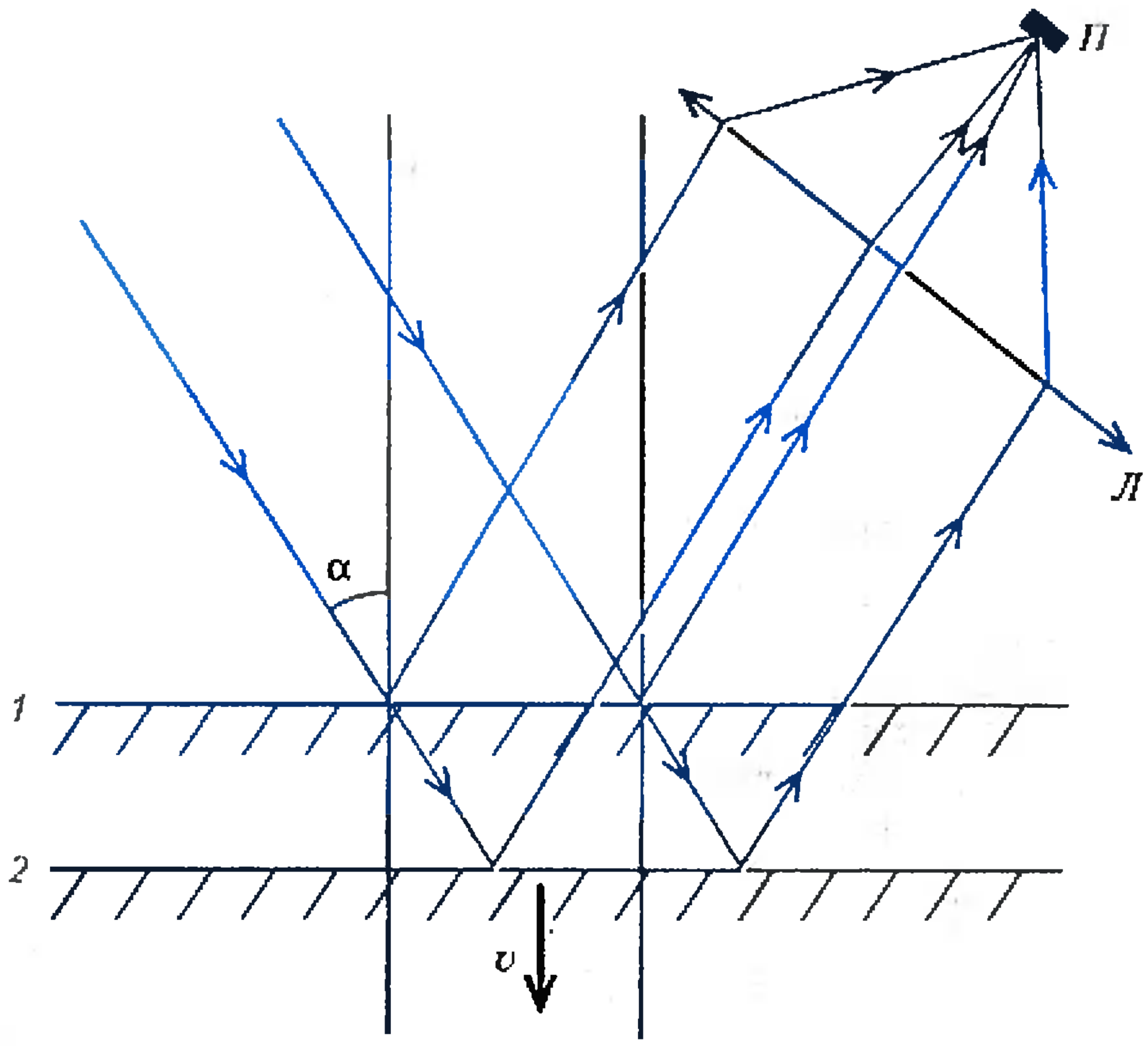


Рис. 9

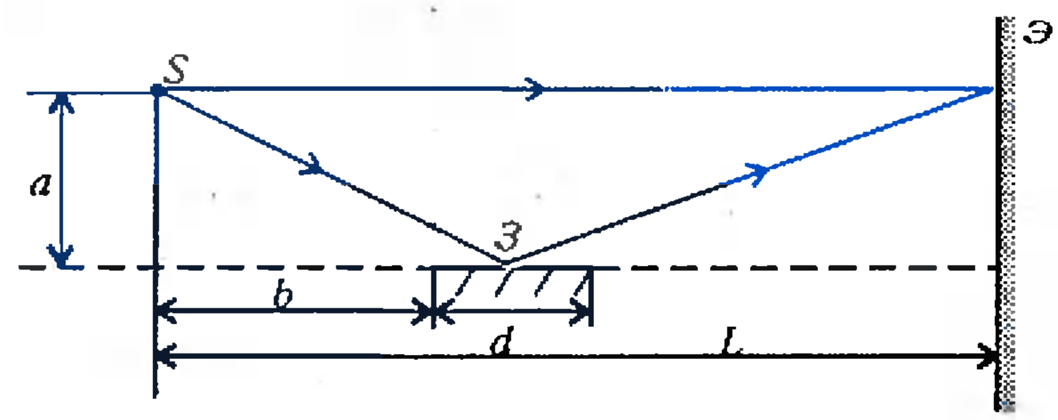


Рис. 10

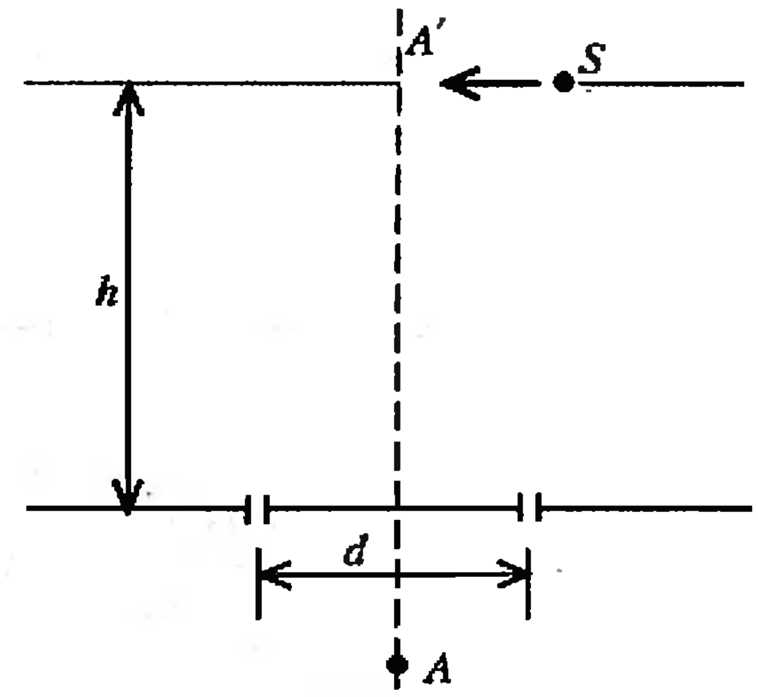


Рис. 11

систему из двух плоскопараллельных полупрозрачных зеркал *1* и *2* (рис.9). Часть светового пучка отражается от зеркала *1*, оставшаяся часть, пройдя зеркало *1*, отражается от зеркала *2* и, снова пройдя зеркало *1*, вместе с пучком, отраженным от зеркала *1*, с помощью собирающей линзы *Л* фокусируется на приемник *П*, сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала, регистрируемого приемником, в случае равномерного движения второго зеркала (относительно первого) со скоростью v = 0,01 см/с?

3. На рисунке 10 изображена схема интерференционного опыта Ллойда. Точечный источник света *S* расположен на расстоянии b = 20 см от плоского зеркала *З* на высоте a = 10 см над плоскостью зеркала. Длина зеркала d = 10 см. На расстоянии L = 1 м от источника расположен экран *Э*. Определите вертикальный размер интерференционной картины на экране.

4. Точечный источник света *S* равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеются два маленьких отверстия на расстоянии d друг от друга (рис.11). Расстояние от источника до плоскости h. Приемник *A*, расположенный на оси системы, регистрирует периодически изменяющуюся интенсивность света. Определите скорость движения источника, если частота колебаний интенсивности f = 15 Гц, длина волны λ = 600 нм, d = 2 мм, h = 1 м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы *AA'*.

5. С целью уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на него наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Пучок белого света (длина волн от 400 до 700 нм) падает нормально на нанесенную на стекло пленку. Показатель преломления пленки 4/3, ее толщина 600 нм. На каких длинах волн отраженный свет максимально ослабляется?

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9–11 классов общеобразовательных школ республик, входивших ранее в состав СССР.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9–11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10–11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	*НЕДЕЛИН ИГОРЬ ИВАНОВИЧ*
Класс, в котором Вы учитесь в своей школе	*9«а»*
Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два отделения)	*математическое (математическое и физическое)*
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	*632149 Новосибирская обл., с.Мезениха, ул. Андрианова, д.28 «а», кв.5*

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Для получения ответа вложите конверт с маркой с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. Обязательно запишите краткое условие каждой задачи, а номер задачи поставьте тот, который был в задании. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку; тетрадь должна быть тонкой). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Для поступления в ЗШ достаточно решить две-три задачи (если какую-то задачу Вы не смогли решить до конца, не расстраивайтесь и напишите нам свои соображения, часть решения, решение в частном случае). Сообщение о размере оплаты за обучение Вам будет выслано вместе с проверенным первым заданием. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул.Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ. Телефон: (383-2)39-78-89

Первое задание по физике

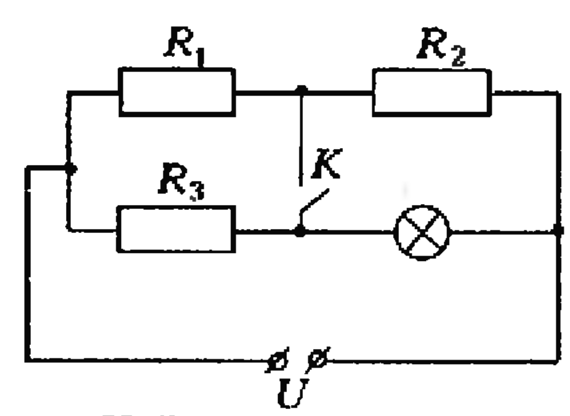
9 КЛАСС

1. Пустая цилиндрическая пробирка, опущенная вертикально в воду, оказалась погруженной на 2/3 своего объема. После того как в нее положили дробинку массой m = 10 г, она оказалась погруженной на 3/4 объема. Чему равна масса пробирки?

2. Двигаясь по эскалатору метро длиной L с относительной скоростью v, человек проходит его за t_1 = 60 с, а двигаясь в противоположную сторону с той же относительной скоростью — за t_2 = 120 с. Определите скорость v и скорость эскалатора, если L = 120 м.

3. В калориметр, в котором находится m_0 = 100 г льда при температуре t_0 = = 0 °С, добавили m_1 = 150 г воды при t_1 = 50 °С. Определите установившуюся температуру. Удельная теплоемкость воды c_1 = 4190 Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда λ = = 335200 Дж/кг.

4. Дана электрическая схема, представленная на рисунке. Оказалось, что при замкнутом и разомкнутом положениях ключа K накал лампочки один и



тот же. Найдите сопротивление лампочки. Указаные на рисунке сопротивления считать известными.

10 КЛАСС

1. Ракета взлетает вверх с постоянным ускорением. Одновременно со стартом ракеты производится выстрел из пушки. Снаряд попадает в ракету, когда находится в наивысшей точке своей траектории. Каково ускорение ракеты? Сопротивлением воздуха при полете снаряда пренебречь.

2. Две обезьяны, массы которых m и M, висят на веревке, перекинутой по разные стороны блока. Первая обезьяна, выбирая веревку, поднимется с ускорением a. Как движется вторая обезьяна? Масса веревки мала по сравнению с массой обезьян.

3. Чему равно центростремительное ускорение Луны при движении ее вокруг Земли? Считать расстояние от центра Земли до Луны L = 400000 км, радиус Земли R = 6400 км.

4. Две груженные мешками с мукой дрезины движутся параллельными курсами по рельсам. После того как с первой дрезины на вторую перебросили мешок массой m, ее скорость уменьшилась в два раза. Какую скорость будет иметь вторая дрезина? Начальная масса каждой груженной дрезины M, скорость v.

5. Пуля массой m, имеющая начальную скорость v, пробивает груз массой M. Найдите скорость пули, если при ее взаимодействии с грузом выделилось количество теплоты Q.

11 КЛАСС

1. Два груза, массой M каждый, находятся на горизонтальной поверхности. Летящая горизонтально пуля массой m пробивает первый груз и застревает во втором. После взаимодействия грузы смещаются по поверхности на расстояния x_1 и x_2 соответственно. Найдите начальную скорость пули, если коэффициент трения скольжения грузов о поверхность μ.

2. Сколько электронов содержится в одном грамме азота, железа, урана-238?

3. Идеальный газ участвует в процессе, который на V,T-диаграмме изображается отрезком прямой. При этом давление газа поддерживается постоянным. Что происходит с массой газа при росте температуры?

4. Известно, что зимой оконные стекла салона трамвая промерзают (покрываются инеем). Почему возможно незначительное промерзание стекол в двух случаях: а) салон не отапливается; б) салон очень теплый?

5. Шарик массой m, подвешенный на нити длиной L, вращается в горизонтальной плоскости по окружности. При этом нить составляет угол α с вертикалью. Вектор напряженности электрического поля в каждой точке орбиты направлен по радиусу окружности и равен E. Какой заряд необходимо сообщить шарику, чтобы период его обращения был равен T_0?

6. Два одинаковых плоских конденсатора, емкости которых C_1 и C_2, соединены параллельно. Суммарный заряд на обкладках конденсаторов Q. Какая внешняя работа совершается при медленном полном сближении пластин одного из конденсаторов?

Первое задание по математике

9 КЛАСС

1. В окружность вписан правильный треугольник ABC. Докажите, что хорда, соединяющая середины дуг AB и BC, делится точками пересечения со сторонами AB и BC на три равные части.

2. Выясните, не используя калькулятор, какое число больше:

$$\sqrt{1996}+\sqrt{1998} \text{ или } 2\sqrt{1997}?$$

3. Можно ли занумеровать ребра куба числами 1, 2, 3, ..., 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трех ребер, выходящих из нее, была одной и той же?

4. На шахматной доске 8×8 в некотором порядке расставлены 19 коней. Докажите, что из них можно выбрать 10 коней так, чтобы никакие два из выбранных не били друг друга.

5. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что периметры треугольников AOB, BOC, COD и DOA равны. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

6. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем все они собрали разное число грибов. Докажите, что среди них найдутся трое, собравших вместе не меньше 50 грибов.

10 КЛАСС

1. При каких целых x число x^2+6x+8 простое? (Целое число $a\neq\pm1$ называется простым, если его положительными делителями могут быть только числа 1 и $|a|$.)

2. Внутри остроугольного треугольника ABC взята такая точка P, что $\angle APB=\angle ACB+60°$, $\angle BPC=\angle BAC+60°$, $\angle CPA=\angle CBA+60°$. Докажите, что продолжения отрезков AP, BP, CP за точку P пересекают описанную вокруг треугольника ABC окружность в точках, являющихся вершинами правильного треугольника.

3. Найдите наименьшее значение многочлена $x(x+1)(x+2)(x+3)$.

4. Докажите, что круги, построенные на сторонах произвольного четырехугольника как на диаметрах, целиком его покрывают.

5. Дробь $\frac{16}{64}$ можно «сократить» зачеркиванием шестерок: $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$. Найдите все дроби с таким свойством, числитель и знаменатель которых двузначные числа.

6. Докажите, что, как бы мы ни сложили квадрат 8×8 из 32 костей домино 1×2, всегда найдутся две из них, образующие квадрат 2×2.

11 КЛАСС

1. В круге радиусом R расположены три попарно непересекающихся круга. Докажите, что сумма их радиусов не превосходит $\frac{3}{2}R$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

3. Углы треугольника ABC удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

Докажите, что треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

4. Докажите, что многочлен

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

имеет действительные корни при любых действительных значениях a, b и c.

5. Купил Роман раков, вчера мелких по цене 510 рублей за штуку, а сегодня по 990, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25200 рублей. Из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от 160 до 200 рублей. Определите, сколько купил Роман раков вчера и сколько сегодня.

6. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100 по одному в каждой клетке так, что числа в каждой строке возрастают слева направо. Найдите минимальное и максимальное возможные значения, которые может принимать сумма чисел, стоящих в пятом столбце таблицы. Дайте обоснование полученным результатам.

ИТОГИ МЕЖОБЛАСТНОЙ ЗАОЧНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

В ноябре — декабре 1996 года Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» провела Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6 — 10 классов (информация о школе и об олимпиаде была опубликована в «Кванте» №5, 6 за 1996 год). В олимпиаде приняли участие более девяти тысяч школьников из различных регионов России и стран СНГ. Следует отметить большую активность и высокий уровень работ участников. По результатам олимпиады дипломами первой степени награждены 86 школьников (полный список награжденных опубликован в газете «Первое сентября»). Среди них 38 шестиклассников, 10 семиклассников, 12 восьмиклассников, 11 девятиклассников и 15 десятиклассников.

Абсолютными победителями олимпиады стали

по 6 классам — Калязина Д. (ученица 5 кл.), г.Тверь,

по 7 классам — Старков А., г.Самара,

по 8 классам — Скопенков М., г.Саратов,

по 9 классам — Мельникова С., п.Лопарево Костромской обл.,

по 10 классам — Родионов Т., г.Ростов-на-Дону.

Наиболее интересные и оригинальные работы, по мнению Оргкомитета олимпиады, представили

по 6 классам — Дремов Д. (ученик 3 кл.), г.Волгодонск,

Сатарин А., г.Подольск,

Бахтин Н., г.Новочеркасск,

Энун И., г.Губкин,

Медведева К., г.Чайковский,

Анисимков А., п.Демянск Новгородской обл.;

по 7 классам — Самодуров А., г.Воронеж,

Усанов В., г.Армавир,

Лонин И., г.Мончегорск,

Попова Ю., с.Плеханово Липецкой обл.,

Алексеенко И., ст.Березанская Краснодарского кр.;

по 8 классам — Иванников Н., г.Старый Оскол,

Таровская Т., г.Самара,

Сорогина Т., г.Воронеж,

Новиков Г., г.Курск;

по 9 классам — Тутушкин В., г.Псков,

Ефремов Е., г.Курск

Губанов В., г.Курск

Шиман М., г.Шебекино,

Бабенко М., г.Саратов;

по 10 классам — Черняховский О., г.Новгород,

Михаскив Д., г.Архангельск,

Старенкова Т., г.Ростов-на-Дону,

Федосова А., г.Воронеж,

Гусев Д., г.Пенза.

Все абсолютные победители награждаются подпиской на журнал «Квант» на 1997 год. Более 50 школьников, приславших наиболее интересные и оригинальные решения и награжденные дипломами первой степени, по решению Оргкомитета олимпиады приглашены на очередную Межгосударственную научно-практическую конференцию школьников. Дипломанты олимпиады — девятиклассники и десятиклассники, — успешно окончившие 11 класс школы «АВАНГАРД», получат дополнительные льготы при поступлении в Московский инженерно-физический институт.

Адрес школы «АВАНГАРД»: 115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, кор.3.

LX Московская математическая олимпиада

Избранные задачи окружного тура

1. По кругу лежат 5 монет гербом вниз. Разрешается переворачивать одновременно три монеты, лежащие подряд. Можно ли таким способом положить все монеты гербом вверх? (5)[1]

2. Квадрат разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 5×11 и 4×6. Какие размеры может иметь третий прямоугольник? (5)

3. Из доски 4×4 вырезали одну клетку тремя способами (рис.1). Разрежьте одну из получившихся досок на две части так, чтобы из них можно было сложить каждую из двух оставшихся. (6)

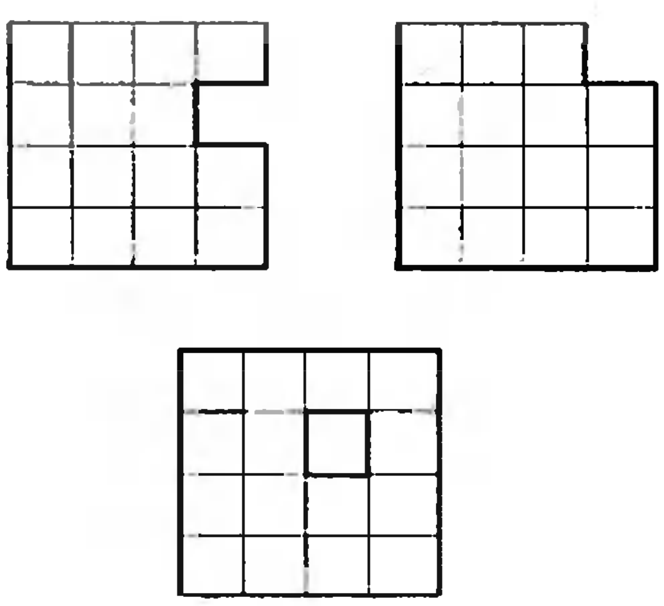


Рис. 1

4. Придумайте число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17. (6)

5. Найдите значение дроби

$$\frac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н},$$

где разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения. (6)

6. Какая дробь больше:

$$\frac{166\ldots6}{66\ldots64} \text{ или } \frac{199\ldots9}{99\ldots95},$$

где в числителях и знаменателях стоят по 1997 одинаковых цифр? (8)

7. Когда обезьяна несла три одинаковых кокосовых ореха на вершину многоэтажного дерева, один орех упал с 11-го этажа и разбился. Обезьяна хочет определить самый высокий этаж, при падении с которого кокосовые орехи не разбиваются. Она может уронить орех с любого этажа и подобрать его, если он цел. Докажите, что ей хватит четырех испытаний (с двумя орехами). (8)

8. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков? (9)

9. Взяли 100 чисел. Среди их всевозможных произведений по два числа оказались 1000 отрицательных. Сколько среди исходных чисел могло быть нулей? (10)

10. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди ее соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет? (10)

11. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 1997? (11)

12. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях во внешнюю сторону построены правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'. (11)

[1] *В скобках указан класс, в котором предлагалась задача.*

Городская олимпиада

Математический праздник (февраль 1997 года)

6 КЛАСС

1. Витя выложил из карточек пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось (рис.2). Какие карточки переставил Витя?

В.Замков

$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\,291828 \\ \hline 585787 \end{array}$$

Рис. 2

2. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменен буквой x. Найдите этот знаменатель.

А.Спивак

3. В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

А.Галочкин

4. Разрежьте изображенную на рисунке 3 доску на 4 одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала 3 заштрихованные клетки.

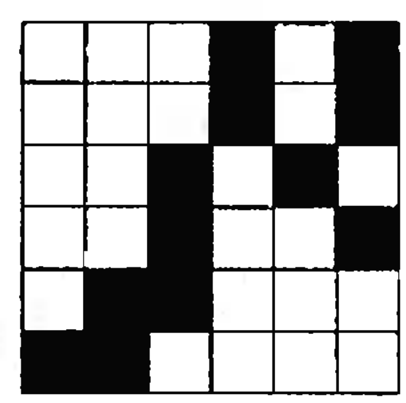


Рис. 3

Фольклор

5. Придумайте такую раскраску граней кубика, чтобы в трех различных положениях он выглядел, как показано на рисунке 4. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развертку.)

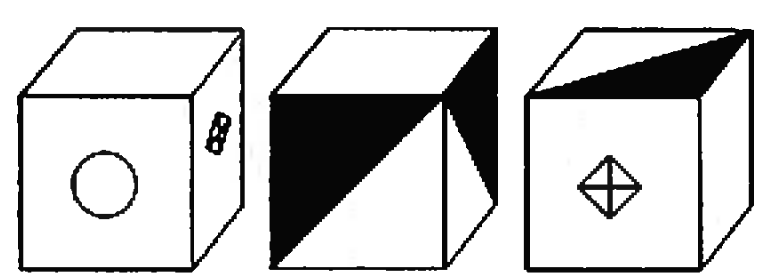


Рис. 4

Фольклор

6. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Бросать фонарик нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

Из электронной конференции rec.puzzles

7 КЛАСС

1. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a\times b$ и $b\times a$ считаются одинаковыми.)

С.Дориченко

2. В Мексике экологи добились закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек? б) 8 человек?

И .Ященко

3. Четырехугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные

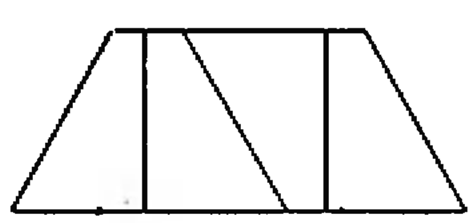


Рис. 5

стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рис.5) В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.

А.Ковальджи

4. См. задачу 3 для 6 класса.

5. В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удается списать, он отвечает правильно, а в пр отивном случае — наугад (т. е. среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $1/5$ часть). За год двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

А.Спивак, И.Ященко

6. Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левом рисунке, а если справа — то как на правом рисунке (рис.6). Нарисуйте вид сверху.

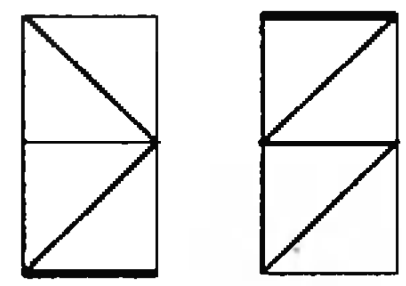


Рис. 6

А.Шень

Задачи старших классов

8 КЛАСС

1. В некоторых клетках шахматной доски стоят фигуры. Известно, что на каждой горизонтали стоит хотя бы одна фигура, причем на разных горизонталях — разное число фигур. Докажите, что всегда можно отметить 8 фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояла ровно одна отмеченная фигура.

В.Произволов

2. От вулканостанции до вершины вулкана Стромболи надо идти 4 часа по дороге, а затем — 4 часа по тропинке. На вершине расположены два кратера. Первый кратер 1 час извергается, потом 17 часов молчит, потом опять 1 час извергается и т.д. Второй кратер 1 час извергается, 9 часов молчит, 1 час извергается и т.д. Во время извержения первого кратера опасно идти и по тропинке, и по дороге, а во время извержения второго опасна только тропинка. Ваня увидел, что ровно в 12 часов оба кратера начали извергаться одновременно. Сможет ли он когда-нибудь подняться на вершину вулкана и вернуться назад, не рискуя жизнью?

И.Ященко

3. Внутри острого угла XOY взяты точки M и N так, что $\angle XON = \angle YOM$. На луче OX отмечена точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на луче OY — точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

В.Произволов

4. Докажите, что существует составное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку остается составным. Существует ли такое 1997-значное число?

А.Шаповалов

5. В ромбе $ABCD$ величина угла B равна 40°, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.

М.Волчкевич

6. Банкир узнал, что среди одинаковых на вид монет одна — фальшивая (более легкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причем потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

А.Шаповалов

9 КЛАСС

1. В треугольнике одна сторона в 3 раза меньше суммы двух других. Докажите, что противолежащий ей угол — наименьший угол треугольника.

А.Толпыго

2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

В.Дольников

3. В выпуклом шестиугольнике $AC_1BA_1CB_1$ дано: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ и $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Докажите, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.

В.Произволов

4. По окружности в одном направлении на равных расстояниях курсируют n поездов. На этой дороге в вершинах правильного треугольника расположены станции A, B и C (обозначенные по направлению движения). Ира входит на станцию A и одновременно Леша входит на станцию B, чтобы уехать на ближайших поездах. Известно, что если они входят на станции в тот момент, когда машинист Рома проезжает лес, то Ира сядет в поезд раньше Леши, а в остальных случаях Леша — раньше Иры или одновременно с ней. Какая часть дороги проходит по лесу?

А.Ковальджи

5. $2n$ спортсменов дважды провели круговой турнир (в круговом турнире каждый встречается с каждым, за победу начисляется одно очко, за ничью — $1/2$, за поражение — 0). Докажите, что если сумма очков каждого изменилась не менее чем на n, то она изменилась ровно на n.

Б.Френкин

6. См. задачу М1598, б) «Задачника «Кванта».

10 КЛАСС

1. Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, ортогональные проекции которого на некоторые три попарно перпендикулярные плоскости являются кругами?

А.Канель-Белов

2. Докажите, что среди четырехугольников с заданными длинами диагоналей и заданным углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

Фольклор

3. а) Каждую сторону четырехугольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на ее длину (рис.7). Оказалось, что новые концы построенных отрезков служат вершинами квадрата. Докажите, что исходный четырехугольник — квадрат.

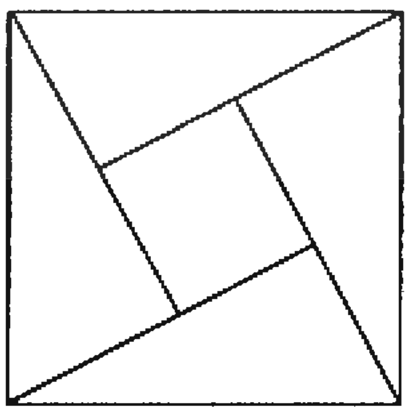


Рис. 7

б) Докажите, что если в результате такой же процедуры из некоторого n-угольника получается правильный n-угольник, то исходный n-угольник — правильный.

М.Евдокимов

4. Даны действительные числа

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \text{ и } b_1 \le b_2 \le b_3$$

такие, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1.$$

Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

К.Фельдман

5. В круговом турнире не было ничьих, за победу присуждалось 1 очко, за поражение — 0. Затем был определен коэффициент каждого участника. Он равнялся сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициенты равны. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.

Б.Френкин

6. См. задачу М1599 «Задачника «Кванта».

11 КЛАСС

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$$\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA'}{4R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

А.Заславский

2. Найдите значение интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\right) dx.$$

М.Вялый

3. На доске написаны три функции:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x},$$

$$f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = (x-1)^2.$$

Можно складывать, вычитать и перемножать эти функции (в частности, возводить их в квадрат), умножать их на произвольное число, прибавлять к ним произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями. Получите таким образом функцию $1/x$. Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $1/x$ невозможно.

М.Евдокимов

4. Можно ли разбить правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длины ребер каждого из которых меньше $1/100$? (Правильный октаэдр — это выпуклый многогранник, все 8 граней которого — одинаковые правильные треугольники, причем в каждой вершине сходятся четыре грани.)

В.Произволов

5. См. задачу М1597, б) «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1600 «Задачника «Кванта».

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Есть n гирь. Известно, что масса каждой — целое число граммов и их общая масса меньше p г. При каком наибольшем p можно с помощью чашечных весов гарантированно определить массу каждой гири? (Можно класть гири на чаши в любых сочетаниях и проводить любое число взвешиваний.) (9)

А.Шаповалов

2. Десять банкиров сидят за круглым столом. У каждого на счете записано действительное число, среди этих чисел есть и положительные, и отрицательные. Банкиры по очереди прибавляют остальным банкирам одну девятую своего (к началу операции) числа, а себе пишут ноль. Докажите, что после десятой операции у банкиров не могут оказаться исходные десять чисел. (9)

А.Ковальджи

3. Ломаная разбивает круг на две равновеликие части. Докажите, что кратчайшая такая ломаная — это диаметр. (9)

Фольклор

4. Для каждого натурального числа n обозначим через A_n множество натуральных чисел, больших 1, дающих при делении на n остаток 1. Назовем число из A_n неприводимым, если оно не представимо в виде произведения двух меньших чисел из A_n. Докажите, что для любого $n > 2$ в A_n найдется число, представимое в виде произведения неприводимых в A_n чисел различными способами. (10)

В.Сендеров

5. Задано натуральное число $n > 3$. Верно ли, что среди всех n-угольников (не только выпуклых) наибольшую сумму синусов внутренних углов имеет правильный? (10)

В.Сендеров

6. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике так, чтобы каждая пересекалась не более чем с одной другой? (Совпадение концов диагоналей в вершинах за пересечение не считается.) (11)

А.Шаповалов

7. Центр O описанной окружности четырехугольника $ABCD$ не лежит на диагоналях этого четырехугольника. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F.

а) Докажите, что все шесть описанных окружностей треугольников ABF, CDF, BEC, ADE, BOD и AOC пересекаются в некоторой общей точке K.

б) Верно ли, что точка K лежит на прямой EF, а прямые EF и OK перпендикулярны? (11)

А.Заславский

8. Все вершины одного куба лежат на гранях другого куба. Может ли так случиться, что никакая грань первого куба не параллельна никакой грани второго? (11)

В.Произволов

Публикацию подготовили А.Ковальджи, В.Сендеров, А.Спивак

Избранные задачи Московской физической олимпиады

9 КЛАСС

Первый тур

1. Тело движется по прямой. График зависимости его скорости v от координаты x приведен на рисунке 1. Найдите ускорение тела в точке с координатой $x = 3$ м. Найдите также максимальное ускорение тела на отрезке от 0 до 5 м.

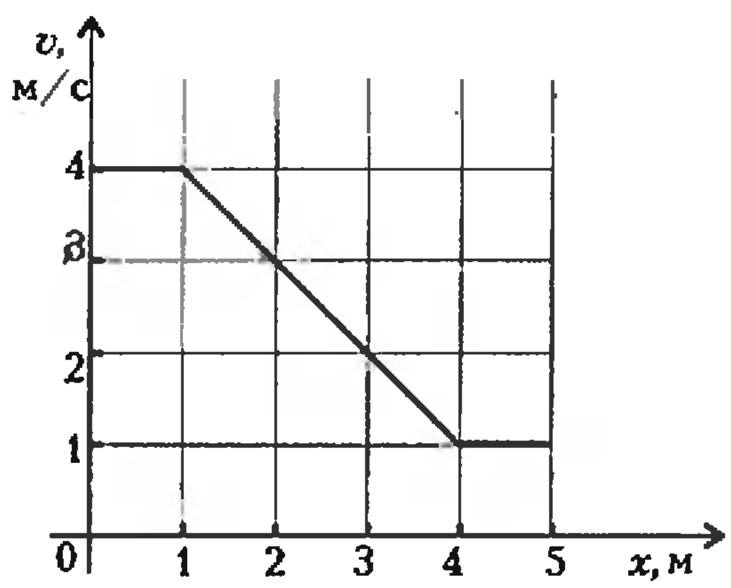


Рис. 1

А.Зильберман

2. «Хитрый» продавец на рынке торгует рыбой, взвешивая ее на весах, сделанных из палки и веревки (рис.2), причем не обманывает покупателей. Покупателю разрешается взвесить рыбу самому, но при условии, что рыба помещается только на левую чашку весов и не снимается до момента расплаты. Продавец разрешает провести максимум два взвешивания, предоставляя покупателю набор гирь. Как определить массу понравившейся вам рыбы? «Коромысло» весов с пустыми чашками занимает горизонтальное положение.

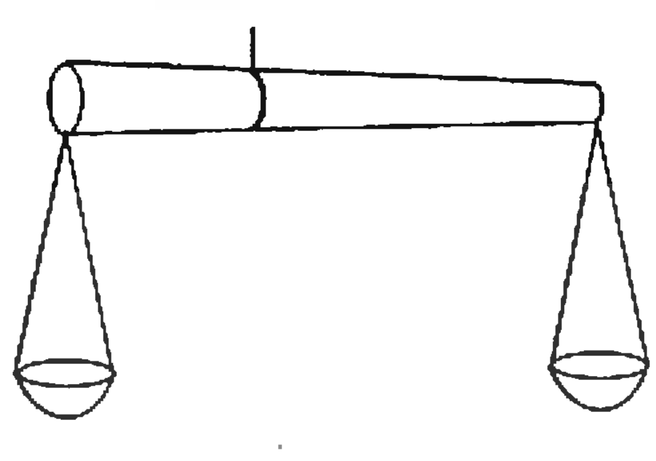


Рис. 2

С.Варламов

3. Кусок однородного гибкого каната массой $M = 10$ кг находится на горизонтальном столе. На один из концов каната действует сила $F = 50$ Н, при этом $2/3$ каната неподвижно лежат на столе. Найдите возможные значения коэффициента трения каната о стол. Считать, что все точки каната находятся в одной вертикальной плоскости.

А.Зильберман

Второй тур

4. Из Анискино (A) в Борискино ($Б$) можно добраться только на моторной лодке по узкой реке, скорость течения которой всюду одна и та же. Лодке с одним подвесным мотором на путь из A в $Б$ требуется время $t_1 = 50$ мин, а с двумя моторами — время $t_2 = t_1/2$. Сила тяги двух моторов вдвое больше силы тяги одного. За какое минимальное время можно добраться из $Б$ в A на лодке с одним и с двумя моторами? Известно, что сила сопротивления движению лодки пропорциональна квадрату скорости движения относительно воды.

С.Варламов

5. На гладком горизонтальном столе лежит вытянутая вдоль плоскости стола невесомая и нерастяжимая нить длиной L, к одному из концов которой прикреплено небольшое тело массой M. Тело в начальный момент неподвижно. Второй конец нити начинают поднимать вертикально вверх с постоянной скоростью. Тело перестает давить на поверхность стола в тот момент, когда нить составляет с вертикалью угол α. Какова скорость подъема конца нити?

С.Варламов

6. В системе, показанной на рисунке 3, отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Найдите ускорение груза массой m_2, подвешенного на нити к легкой оси подвижного блока. Масса оси другого подвижного блока m, масса первого груза m_1. Трением и массой всех блоков пренебречь. Все нити невесомые и нерастяжимые.

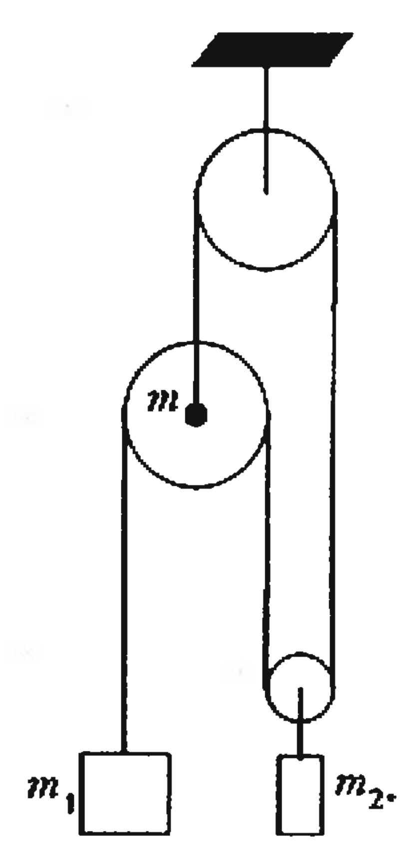


Рис. 3

В.Погожев

7. В схеме, изображенной на рисунке 4, до замыкания ключа K вольтметр показывал нулевое напряжение, а после замыкания ключа стал показывать напряжение $\alpha\mathcal{E}$. Найдите сопротивление резистора R_5. Считать известными α, $\mathcal{E}$, R_3 и R_4. Рассмотреть также случай $R_3 = R_4$. Считать, что сопротивление вольтметра бесконечно велико.

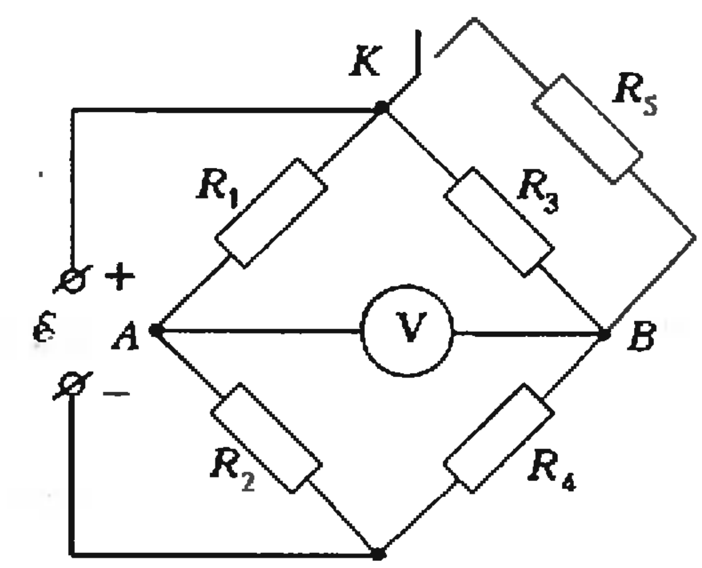


Рис. 4

М.Семенов

10 КЛАСС

Первый тур

1. Оцените отношение силы сопротивления воздуха к силе тяжести для пули, вылетевшей из ствола пистолета. Скорость пули $u = 500$ м/с, ее диаметр $d = 7$ мм, масса пули $m = 9$ г. Плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м^3.

С.Варламов

2. Платформа, установленная на вертикальной невесомой пружине, совершает установившиеся колебания. В тот момент, когда платформа проходит через положение своего равновесия, в нее абсолютно упруго ударяется маленький шарик, падающий с некоторой высоты, причем после соударения скорости платформы и шарика, оставаясь неизменными по модулю, изменяют свои направления на противоположные. Считая известными амплитуду установившихся колебаний платформы A и период ее свободных колебаний T, найдите отношение масс шарика и платформы.

В.Черматкин

3. Над одним молем идеального одноатомного газа совершают процесс $1-2-3-4-1$ (рис.5), причем газ получает от нагревателя за один цикл количество теплоты Q. Какое количество теплоты будет получать газ за один цикл, если совершать над ним процесс $2-3-4-A-B-C-2$? Известно, что $T_3 = 16T_1$, $T_2 = T_4$, B — точка пересечения изотермы $T = T_2$ с прямой $1-3$, проходящей через начало координат pV-диаграммы. Ответ выразите через Q.

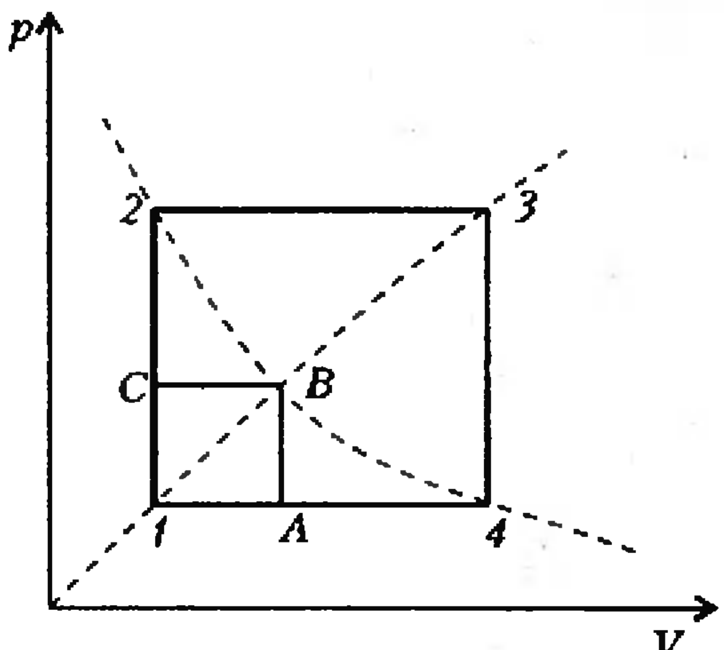


Рис. 5

А.Селиверстов

4. Частица с зарядом q и массой m влетает со скоростью v в плоский незаряженный конденсатор емкостью C параллельно его пластинам. В этот момент в схеме, изображенной на рисунке 6, замыкают ключ K. Как будет зависеть ускорение частицы от времени? Считать, что время пролета частицы через конденсатор много меньше RC и что заряд распределяется по пластинам конденсатора равномерно. Расстояние между пластинами конденсатора d, краевыми эффектами можно пренебречь.

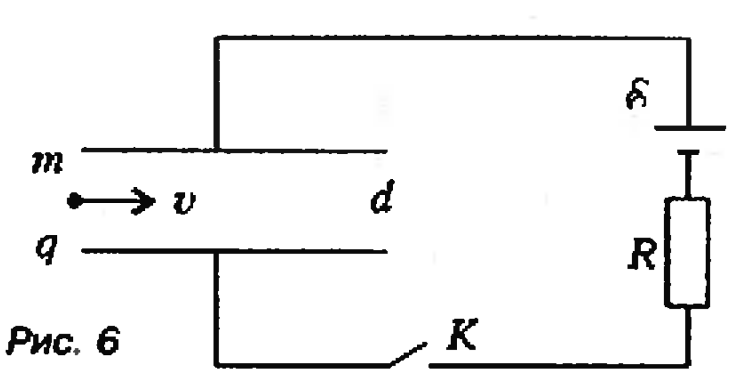


Рис. 6

О.Шведов

Второй тур

5. Маленький шарик падает без начальной скорости с некоторой высоты H на систему из двух закрепленных клиньев, верхние грани которых образуют угол α с горизонтом (рис.7). Место падения находится на расстоянии l по горизонтали от линии касания клиньев. Испытав три абсолютно упругих удара о клинья, шарик вновь поднимается на ту же высоту. Укажите возможные виды траекторий движения шарика и рассчитайте высоту H в наиболее простом случае.

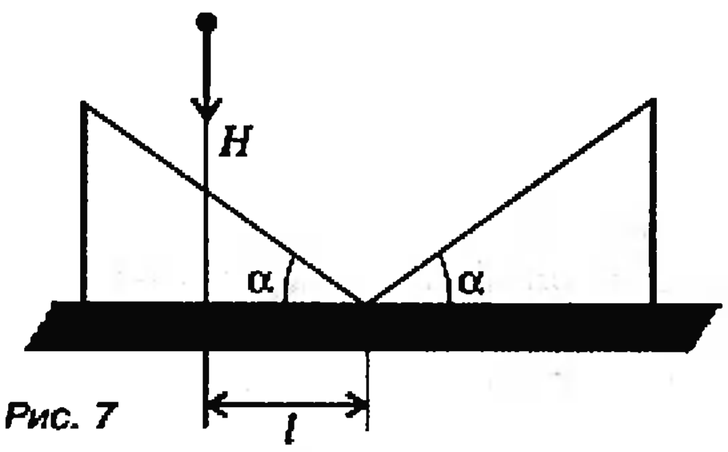


Рис. 7

М.Семенов

6. Из тонкой стальной ленты изготовлена трубка диаметром d = 10 мм. Какое внутреннее давление она может выдержать, если при приложении продольного усилия F = 20000 Н трубка рвется? Считать, что шов на трубке имеет такую же прочность на разрыв, что и материал трубки.

М.Семенов

7. К точкам *1*, *2*, *3* электрической цепи, изображенной на рисунке 8, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары радиусами r, ρ и r соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Сопротивлением и емкостью проводников пренебречь. Считать, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.

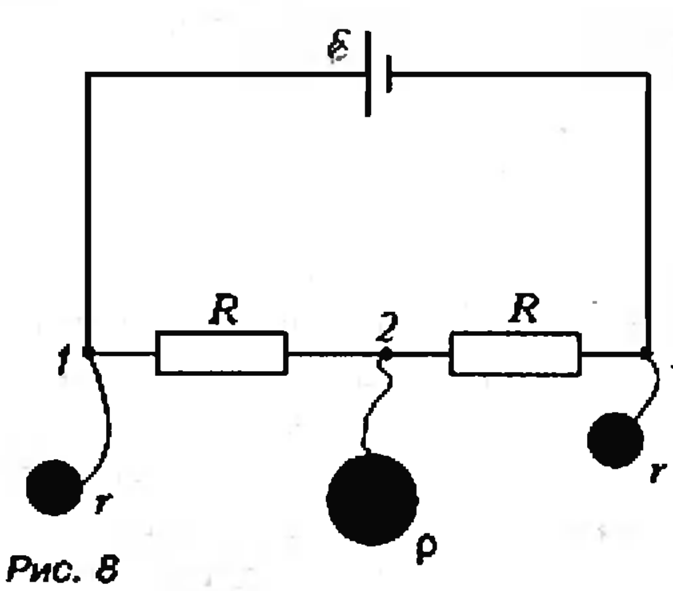


Рис. 8

О.Шведов

11 КЛАСС

Первый тур

1. На вбитом в стену гвозде на нити длиной L висит маленький шарик. Под первым гвоздем на одной вертикали с ним на расстоянии l вбит второй гвоздь. Шарик отводят вдоль стены так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают без толчка. Найдите расстояния l, при которых шарик перелетит через нижний гвоздь.

Г.Пустовалов

2. Пластиковая бутылка из-под газированной воды емкостью 1 л имеет прочные, нерастяжимые, но гибкие стенки. Стеклянный сосуд емкостью 4 л имеет прочные недеформируемые стенки. В бутылку накачали воздух до давления 1 атм при температуре −50 °С, а в стеклянном сосуде создали разрежение −0,6 атм при той же температуре −50 °С. Затем сосуды соединили тонким шлангом и после выравнивая давлений стали медленно поднимать температуру от −50 °С до +50 °С. Постройте график зависимости давления внутри сообщающихся сосудов от температуры. Внешнее давление равно атмосферному p_0.

С.Варламов

3. На вращающейся карусели, имеющей радиус R = 5 м, катается гармонист. При какой максимальной угловой скорости вращения карусели музыка, исполняемая гармонистом, не звучит фальшиво для слушателей, находящихся на земле, если хороший слух позволяет различить разность высот звуков в четверть тона? Два звука отличаются на четверть тона, когда отношение их частот равно $\sqrt[24]{2} \approx 1{,}0293$. Скорость звука в воздухе v = 346 м/с.

С.Варламов

Второй тур

4. Электромотор, статор которого изготовлен из постоянного магнита, включен в сеть постоянного тока с напряжением U и при заданной нагрузке на валу развивает мощность, в n раз меньшую максимальной. Пренебрегая трением, найдите ЭДС, которую создавал бы этот мотор при использовании его в качестве генератора при том же числе оборотов, которое он имеет при работе в качестве двигателя.

В.Погожев

5. В веществе, показатель преломления которого монотонно зависит от одной из координат, луч света может распространяться по дуге окружности. Найдите вид зависимости показателя преломления от этой координаты.

О.Шведов

Публикацию подготовил
М.Семенов

Первая международная олимпиада Астрономического общества

Первая (экспериментальная) международная олимпиада Астрономического общества прошла в рамках III Осенней астрономической школы в Специальной астрономической обсерватории РАН (п.Нижний Архыз Ставропольского кр., 31 октября — 9 ноября 1996 г.). В олимпиаде приняли участие школьники из России, Швеции и Финляндии. Сборная России была сформирована по результатам III Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике.

Планировалось, что международная олимпиада будет включать в себя три тура: теоретический, практический и наблюдательный. Но увы, погода, в целом очень хорошая для ноября, в запланированный вечер не позволила провести наблюдательный тур. Однако как внеконкурсное задание всем было предложено найти на дневном небе Венеру. (Вообще, если точно знать положение звезды, при нормальном зрении обнаружить ее достаточно несложно. Особенно в горах — Нижний Архыз расположен на высоте порядка 1200 м.)

На теоретическом туре участники олимпиады были разделены на две группы: 9—10 классы и 11(12) класс, задания были рассчитаны на 4 часа. Задание практического тура было одинаковым для всех участников и давалось на 2 часа. Языковая проблема решалась так же, как и на большинстве международных олимпиад. Оргкомитет приготовил задания на двух рабочих языках олимпиады — русском и английском. Но непосредственно перед турами руководители команд могли перевести задания на родные языки участников.

Жюри олимпиады возглавил директор Обсерватории профессор Ю.Ю.Балега. Работы участников проверялись жюри по два-три раза. Причем члены жюри были распределены не по странам, как это принято на большинстве других международных олимпиад, а по задачам (так же, как и на Российских олимпиадах). Этим достигается максимальное единообразие критериев проверки: одну и ту же задачу у всех участников проверяют одни и те же члены жюри. После расшифровки работ каждый участник олимпиады смог ознакомиться с оценкой своей работы, с замечаниями, побеседовать с проверявшими задачи членами жюри.

Что же касается самой Осенней астрономической школы, то программа ее была как всегда насыщенной — она включала в себя и лекции по самым современным проблемам астрономии и астрофизики, и практические занятия (современные методы регистрации и обработки данных, применение компьютеров в астрономии, использование ПЗС-матриц, современных спектрометров для регистрации оптических сигналов от космических объектов), и ознакомительные экскурсии. Школьники посетили крупнейший в мире радиотелескоп РАТАН-600, крупнейший в Евразии оптический телескоп БТА, несколько небольших телескопов САО и наблюдательной станции Казанского университета, на которых участники школы проводили наблюдения.

Следующую международную олимпиаду Астрономического общества планируется провести также в САО РАН в октябре 1997 года. Информация (на русском и английском языках), включая подробности участия в олимпиаде, будет размещена в Интернете, на WW Подмосковного филиала МГУ (142432 Черноголовка Московской обл., Институтский просп., 15): http://www.issp.ac.ru/univer/. Электронная почта: gavrilov@issp.ac.ru. Заинтересованных читателей просим присылать свои задачи, вопросы, замечания и советы по указанным адресам.

Ниже приводятся условия теоретических задач Первой международной олимпиады Астрономического общества.

9—10 КЛАССЫ

1. Для чего иногда лучше использовать маленький телескоп на околоземной орбите, чем большой на поверхности Земли?

2. На объектив 5-сантиметрового телескопа села жирная черная муха. Что увидит при этом наблюдатель, исследующий Луну?

3. Почему мы наблюдаем больше метеоритов в период от полуночи до рассвета, чем от заката до полуночи?

4. Двенадцать знаков Зодиака имеют равную протяженность на эклиптике. В каком из них Солнце находится меньше всего?

5. От звезды с пятой видимой звездной величиной на 1 см^2 поверхности Плутона падает примерно 10000 фотонов в секунду. Сколько фотонов соберет за полчаса фотоприемник от звезды со звездной величиной 20^m, если используется БТА на Земле (диаметр зеркала 6 м)?

6. Параллакс Солнца равен 8,8″, а параллакс некоторой звезды с такой же абсолютной звездной величиной — 0,022″. Можно ли увидеть эту звезду невооруженным глазом?

7. Луна зашла вчера в Санкт-Петербурге ($\varphi = 60°$, $\lambda = 30°$) точно в полночь. В каких странах можно будет наблюдать полное солнечное затмение на следующей неделе?

8. На медленно вращающийся астероид диаметром 2,2 км и средней плотностью 2,2 г/см^3 совершил посадку космический корабль. Космонавты решили объехать этот астероид на вездеходе за 2,2 часа. Смогут ли они это сделать? Если нет, то почему? Если да, то как?

11(12) класс

1. Почему некоторые звезды выглядят двойными в голубых лучах, но не разрешаются в красных лучах?

2. Почему радиоастрономы могут проводить наблюдения днем, а астрономы-оптики обычно вынуждены наблюдать ночью?

3. Почему для некоторых наблюдений лучше использовать наземный телескоп среднего размера, чем космический телескоп на низкой околоземной орбите?

4. Каковы причины, по которым космический телескоп Хаббла способен регистрировать более слабые объекты, чем это могут крупные наземные телескопы?

5. См. задачу 7 для 9 — 10 классов.

6. Параллакс Альтаира (α Орла) $\pi = 0{,}198''$, собственное движение $\mu = 0{,}658''$ в год, радиальная скорость $V_r = -26$ км/с, звездная величина $m = 0{,}89^m$. На каком расстоянии Альтаир пролетит мимо Солнца, когда это произойдет, и какой при этом будет звездная величина Альтаира?

7. Недавно на Гавайских островах начал работу 10-метровый рефлектор им. У.Кека, позволяющий достичь разрешения $0{,}3''$. Какие слабейшие звезды можно наблюдать на этом телескопе глазом?

М.Гаврилов

ПРИЗЕРЫ ПЕРВОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ОЛИМПИАДЫ АСТРОНОМИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Дипломы I степени получили

Евдокимов Н. — Москва, Россия,

Журавлев В. — Москва, Россия,

Тунцов А. — Москва, Россия,

Чилингарян И. — Москва, Россия.

Дипломы II степени получили

Андерссон А. — Стокгольм, Швеция,
Бондарь В. — Кировская обл., Россия,
Мазунин С. — Санкт-Петербург, Россия,
Поднебесов А. — Оренбург, Россия,
Пудеев А. — Нижний Новгород, Россия.

Дипломы III степени получили

Альквист Э. — Стокгольм, Швеция,
Карьялайнен Е.-Л — Стокгольм, Швеция,
Павлюченко С. — Ухта, Россия,
Шахворостова Н. — Краснодар, Россия.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

(см. «Квант» №3)

1. Вес рыбы равен 16 фунтам.

2. Сначала заметим, что по крайней мере две стороны основного квадрата граничат только с единичными квадратиками и потому длина стороны этого квадрата — целое число. Пусть сторона основного квадрата равна y, а искомого — x, тогда площадь всего квадрата равна $y^2 = x^2 + 35$, откуда $(y - x)(y + x) = 35$. Но 35 раскладывается на два множителя всего двумя способами: $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$. В первом случае $y - x = 1$, $y + x = 35$, откуда $x = 17$, $y = 18$. Во втором случае $y - x = 5$, $y + x = 7$, откуда $x = 1$, $y = 6$. Но в задаче указано, что $x \neq 1$, поэтому имеем единственное решение $x = 17$.

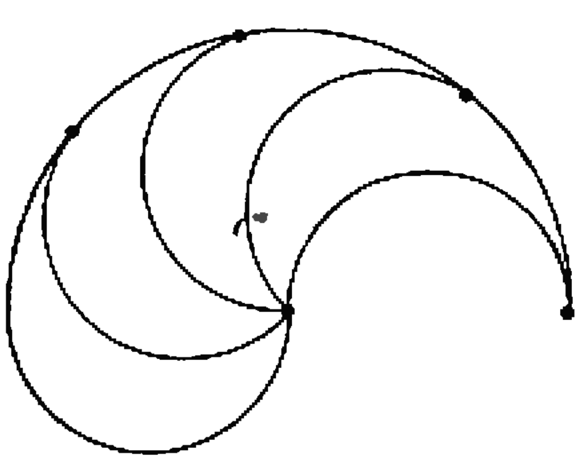


Рис. 1

3. П = 1, Е = 2, В = 3, Т = 4, А = 5, И = 6, К = 7, Р = 8, Ж = 9, Ч = 0.

4. См. рис.1. 5. Это цифры 2 и 6.

ПОСЧИТАЕМ ВЕРОЯТНОСТИ

5. Поскольку 20 = 30 − 10, гистограмма получается отражением из гистограммы, изображенной на рисунке 4 в статье.

6. $20 \cdot 19 = 380$ писем.

7. $C_{15}^2 = \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 105$ партий.

8. Всего двузначных чисел 90. Из них цифра десятков больше цифры единиц у 45 чисел, обе цифры равны у 9 чисел. На 9 делятся 10 двузначных чисел. Значит, вероятности равны а) $1/2$; б) $1/10$; в) $1/9$.

17. 8! способов.

18. 5^6 чисел.

19. а) $5 \cdot 4 \cdot 3 / 5^3$; б) $1/5$; в) $1/5$.

20. $C_n^k / 2^n$.

30. В отношении 3 : 1. *Указание.* Вообразим, что они сыграли еще одну партию. С вероятностью $1/2$ ее выиграет первый игрок и вероятностью $1/2$ — второй. Во втором случае придется играть еще одну партию, которую с вероятностью $1/2$ выиграет второй игрок.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

1. $n_s = n_e + \lambda/L = 1{,}000297$.

2. $f = (2v\cos\alpha)/\lambda = 200$ Гц.

3. $\Delta y = L\dfrac{a/b}{1 + b/d} = 16{,}7$ см.

4. $v = hf\lambda/d = 4{,}5$ мм/с.

5. $\lambda_1 = 640$ нм, $\lambda_2 = 457$ нм.

LX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Городская олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Левые карточки 7 и 9. (Можно доказать, что ответ единствен.)

2. $x = 365$.

3. 19 рыжиков и 11 груздей.

4. Разрежем доску на две половины по вертикали (рис.2). Теперь каждая половина легко режется пополам.

5. См. рис. 3.

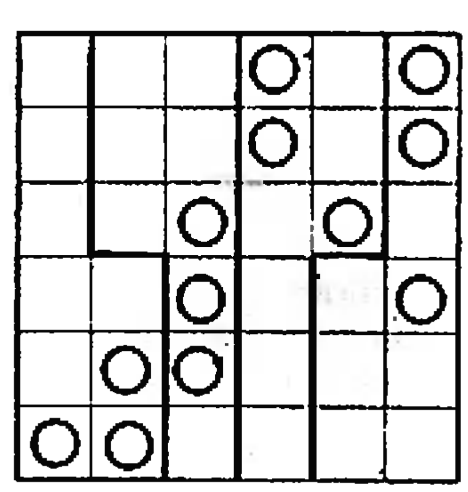


Рис. 2

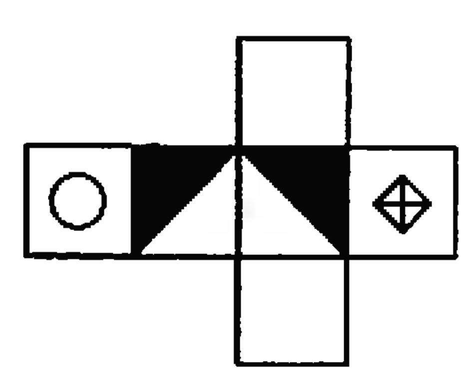


Рис. 3

6. Переходят папа и мама	2 минуты
Папа с фонариком возвращается	1 минута
Переходят бабушка и малыш	10 минут
Мама с фонариком возвращается	2 минуты
Переходят папа и мама	2 минуты
Итого	17 минут

7 класс

1. Поровну. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Значит, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1996: это прямоугольники 1×997, 2×996, 3×995, … …, 499×499. Аналогично, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1998: 1×998, 2×997, 3×996, … …, 498×501, 499×500.
В обоих случаях длина меньшей стороны может быть равна 1, 2, …, 499.

2. а) 5 автомобилей, очевидно, не хватит, а 6 достаточно: нужно только позаботиться о том, чтобы их выходные были в разные дни.
б) 9 автомобилей не хватит: в какой-то день недели два из них должны простаивать, так что на ходу только 7 автомобилей, а нужно 8. А 10 автомобилей достаточно: выходные можно распределить так, что каждый день будут простаивать не больше двух автомобилей.

3. Верхняя сторона состоит из одного большого и трех маленьких отрезков. Если длину маленького отрезка обозначить через x, то длина большего отрезка будет равна $1-3x$. Поскольку нижняя сторона сложена из трех больших отрезков и одного маленького, составляем уравнение

$$3(1-3x)+x=2,$$

откуда $x=\frac{1}{8}$. Значит, длина большего отрезка равна $\frac{5}{8}$, а отношение большего к меньшему равно 5.

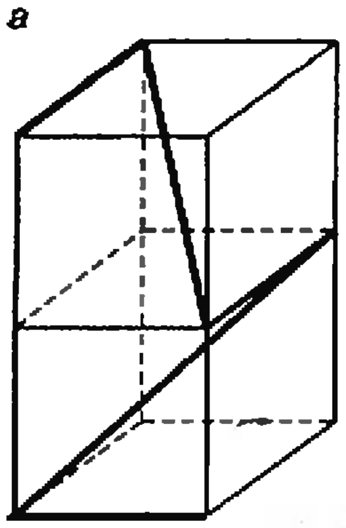
5. Двоечник неверно ответил на половину всех вопросов. Это составляет $4/5$ тех вопросов, на которые он отвечал наугад. Если x — искомая величина задачи, то на $1-x$ часть вопросов двоечник отвечал наугад, так что можно составить уравнение

$$\frac{4}{5}(1-x)=\frac{1}{2},$$

откуда $x=\frac{3}{8}$.

6. Пространственная траектория рыбки выглядит, как на рисунке 4,*а*, а ответ приведен на рисунке 4,*б*.

а



б

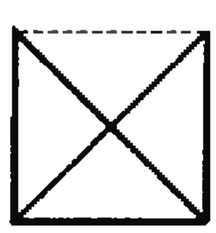


Рис. 4

Задачи старших классов

8 класс

1. Из условия следует, что на некоторой горизонтали стоит ровно 1 фигура, на некоторой другой — 2 фигуры, …, наконец, на некоторой горизонтали — 8 фигур. Пронумеруем горизонтали в соответствии с количеством стоящих на них фигур. Отметим на первой горизонтали ее единственную фигуру. Поскольку на второй горизонтали две фигуры, хотя бы одну из них можно отметить. Поскольку на третьей горизонтали три фигуры, хотя бы одну из них можно отметить, и так далее.

2. Для безопасного подъема достаточно, чтобы к началу движения по дороге перестал извергаться первый кратер, а спустя 4 часа, к началу движения по тропинке, перестал извергаться второй кратер. Первый кратер извергается
1-й, 19-й, 37-й часы. Второй кратер извергается 1-й, 11-й, 21-й, 31-й, 41-й часы. Поэтому Ваня может выйти в начале 38-го часа.

3. Пусть точки L и K симметричны точке M относительно прямых OX и OY соответственно. Тогда точки K, P и N лежат на одной прямой, причем $NK = NP + PK = NP + PM$. Аналогично, на одной прямой лежат точки N, Q и L, а отрезок $NL = NQ + QL = NQ + QM$. Осталось доказать равенство треугольников KON и LON (по двум сторонам и углу между ними).

4. Такое число существует. Перемножим нечетные числа от 1001 до 1999. Поскольку их 500, а каждое из них меньше 2000, то их произведение меньше

$$2000^{500}=2^{500}\cdot10^{1500}=32^{100}\cdot10^{1500}<100^{100}\cdot10^{1500}=10^{1700}.$$

Припишем к этому числу справа несколько нулей, а затем цифру 1 и еще три нуля так, чтобы общее количество цифр равнялось 1997. Если в полученном числе изменить последние три нуля на четное число, то число останется четным. Если же изменить последние три нуля на нечетное число $\overline{abc}$, то последние четыре цифры образуют число $\overline{1abc}$, на которое делится построенное число.

5. Пусть K — середина AD. Тогда $AK = KD = BE$, поэтому отрезок BK делит AF пополам, причем $BK \parallel ED$ и потому $BK \perp AF$. Отсюда $BF = AB = BC$, так что F — точка пересечения DE и дуги AC (величины 40°) с центром B. Итак, $\angle AFC = (360^\circ - 40^\circ)/2 = 160^\circ$, $\angle DFC = 360^\circ - 160^\circ - 90^\circ = 110^\circ$.

6. Решим сначала более простую задачу. Пусть банкир разрешает класть на весы монеты не более 1 раза. Из какого наибольшего числа монет можно выделить более легкую за k взвешиваний? Если при каком-то взвешивании на чаше весов будет больше одной монеты, то из них выделить фальшивую не удастся (второй раз взвешивать монету нельзя!). Поэтому при каждом взвешивании на чаши кладется по одной монете. Если весы не в равновесии, то фальшивая очевидна. А если в равновесии, то количество подозрительных монет уменьшится на 2. Следовательно, при k взвешиваниях можно выделить фальшивую из $2k + 1$ монет. Вернемся к исходной задаче. Разумеется, на чаши весов надо класть поровну монет. Пусть при первом взвешивании на чашах лежат по s монет. Если весы окажутся не в равновесии, то, как было показано, $s \le 2(n-1)+1 = 2n-1$. Если весы в равновесии, то получаем исходную задачу для монет, не попавших на весы, и $n-1$ взвешивания. Поэтому, если обозначить через $f(n)$ ответ исходной задачи, то $f(n) = f(n-1) + 2(2n-1)$. Следовательно,

$$f(n)=2(2n-1)+2(2n-3)+\ldots+2\cdot3+f(1).$$

Поскольку, как легко проверить, $f(1) = 3$, имеем $f(n) = 2n^2 + 1$.

9 класс

1. Поскольку против меньшей стороны треугольника расположен его меньший угол, достаточно доказать, что если a, b и c — длины сторон треугольника и при этом $a = (b+c)/3$, то a — самая маленькая из длин. Можно считать, что $b \le c$. По неравенству треугольника $a + b > c$. По условию $c = 3a - b$. Значит, $a + b > 3a - b$, т.е. $2b > 2a$, что и требовалось доказать.

2. Занумеруем кусочки в порядке возрастания масс. Налево положим 1-й, 3-й, 5-й и 7-й кусочки, а направо — 2-й, 4-й, 6-й и 8-й. Тогда перевесит правая чаша. А если затем налево добавить 9-й кусочек, то перевесит левая чаша. Следовательно, достаточно разрезать 9-й кусочек.

3. Так как сумма внутренних углов шестиугольника равна 720°, то $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 360^\circ$. Отсюда следует, что из треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A можно сложить треугольник, прикладывая равные стороны к равным. Этот треугольник равен треугольнику ABC (по трем сторонам). Получили: $2S_{ABC} = S$, где S — площадь исходного шестиугольника.

4. Примем расстояние между соседними машинистами (измеряемое по окружности) за единицу длины. Тогда длина всей окружности будет n, а длина дуги BCA — $2n/3$. Пусть в некоторой точке M — лес. Тогда во всех точках, удаленных от M на кратные единице расстояния, — тоже лес. Достаточно определить расположение леса на интервале длины 1, поскольку участки леса повторяются периодически. Назовем поезд ближайшим к станции, если он прибудет на эту станцию раньше остальных. Рассмотрим момент, когда некоторый поезд отходит от станции B. Пусть в этот момент ближайший к станции A поезд находится на расстоянии x от нее. Тогда весь интервал между ними длины x покрыт лесом. Покажем, что соседние интервалы длины $1-x$ лесом не покрыты. Действительно, когда ближайший к A поезд придет в A, то ближайший к B поезд будет на расстоянии $1-x$ от B.

Величина x меньше единицы (интервала между машинистами), она получается вычитанием из длины дуги BAC наибольшего целого числа, не превосходящего этой длины, т.е. $x = \{2n/3\}$ — дробной части числа $2n/3$. Итак, если n делится на 3, то лес отсутствует; если n при делении на 3 дает остаток 1, то лес составляет $2/3$ дороги; если n при делении на 3 дает остаток 2, то лес составляет $1/3$ дороги.

5. Участники турнира делятся на тех, кто увеличил свою сумму очков (не менее чем на n), и тех, кто ее уменьшил. Хотя бы одна из этих двух групп включает не менее n спортсменов. Пусть, например, такова первая группа и пусть в ней x спортсменов. Если их общая сумма очков увеличилась на D, то

$$D \geq x \cdot n.$$

Эта сумма увеличилась за счет встреч x спортсменов с остальными $2n-x$. Каждая из этих встреч добавила не более одного очка. Поэтому $D \leq x\cdot(2n-x)$. В итоге получаем $2n - x \geq n$. Но по предположению $x \geq n$. Значит, $x = n$. Следовательно, $D = n\cdot n$, и каждый спортсмен первой группы увеличил свою сумму очков ровно на n. Ко второй группе применимо такое же рассуждение.

10 класс

1. Рассмотрим шар и его проекции на три плоскости. Пусть некоторая точка сферы не проецируется ни на одну из границ проекций. Тогда небольшая «сферическая шапочка» обладает тем же свойством. Отрежем от шара соответствующий кусочек — получим фигуру, не являющуюся шаром, но дающую те же самые проекции на рассматриваемые плоскости.

2. Перенесем треугольник ABD на вектор $\overrightarrow{AC}$ в новое положение $C'B'D'$. Четырехугольник $BB'D'D$ — параллелограмм. По неравенству треугольника $BC + CD' \geq BD'$ и $B'C + CD \geq B'D$; равенства достигаются только если C — точка пересечения BD' и DB'.

3. б) Очевидно, из правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ после продолжения сторон получится правильный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$. Поскольку все правильные n-угольники подобны, то любой из них можно получить такой процедурой из некоторого правильного n-угольника. Осталось доказать, что по многоугольнику $B_1B_2\ldots B_n$ многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ определяется однозначно.

При гомотетии с центром B_1 и коэффициентом $1/2$ точка A_1 перейдет в A_2. При гомотетии с центром B_2 и коэффициентом $1/2$ точка A_2 перейдет в A_3, и так далее. При гомотетии с центром B_n и коэффициентом $1/2$ точка A_n перейдет в A_1. Итак, точка A_1 перешла в себя при композиции гомотетий. Композиция n гомотетий с коэффициентами $1/2$ есть гомотетия с коэффициентом $1/2^n$ и центром, однозначно определяемым центрами этих гомотетий. Значит, точка A_1 однозначно определена.

4. Рассмотрим многочлены $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ и $Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$. Они отличаются только свободным членом (достаточно раскрыть скобки). Поэтому график одного многочлена получается из графика другого сдвигом вдоль оси ординат. При $x \leq b_1$ имеем $Q(x) \leq 0$, в частности, $Q(a_1) \leq 0$. Значит, график $y = Q(x)$ получается из графика $y = P(x)$ сдвигом вниз или совпадает с ним. В частности, $Q(a_3) \leq P(a_3) = 0$. Но при $x > b_3$ имеем $Q(x) > 0$. Следовательно, $a_3 \leq b_3$.

5. Допустим, не все набрали одинаковое число очков. Пусть занявшие первое место («первые») набрали по K очков, а занявшие последнее место («последние») — по L очков. (Места определяются по очкам, а не по коэффициентам.) Коэффициент «первого» — это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше KL. Аналогично, коэффициент «последнего» — это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому он не превосходит KL. Если коэффициенты «первого» и «последнего» равны, то они равняются KL. В этом случае каждый «первый» выиграл K встреч у набравших L очков, т.е. у «последних», а каждый «последний» выиграл L встреч у набравших K очков. Если число «первых» больше единицы, то один из них выиграл у другого (не являющегося «последним»). Значит, на первом месте один спортсмен. Аналогично, на последнем месте тоже только один спортсмен. Теперь легко показать, что наличие третьего спортсмена ведет к противоречию.

11 класс

1. Поскольку площадь треугольника ABC равна $AB\cdot BC\cdot CA/4R$, достаточно доказать, что отношение площади треугольника $A'B'C'$ к площади треугольника ABC равно

$$\frac{AB'\cdot BC'\cdot CA' + AC'\cdot CB'\cdot BA'}{AB\cdot BC\cdot CA}.$$

Обозначим $AB'/AB = x$, $BC'/BC = y$ и $CA'/CA = z$. Тогда отношения площадей треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ к площади треугольника ABC равны, соответственно, $x(1-y)$, $y(1-z)$ и $z(1-x)$. Поэтому для решения задачи достаточно проверить тождество

$$1 - x(1-y) - y(1-z) - z(1-x) = xyz + (1-x)(1-y)(1-z).$$

2. Сделаем подстановку $y = \frac{\pi}{2} - x$. Очевидно, $dy = -dx$;

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin x)dx = \int_{\pi/2}^0 \sin^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)(-1)dy = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos y)dy.$$

Поскольку $\cos^2(\cos x) + \sin^2(\cos x) = 1$, имеем

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\cos x)\right)dx = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2.$$

3. Заметив, что $f_2(x) - f_3(x) = 2x - 1$, получаем

$$\frac{1}{x} = f_1(x) - \frac{1}{2}\left(f_2(x) - f_3(x) + 1\right).$$

Поскольку операция деления отсутствует, выразить $1/x$ только через f_2 и f_3 невозможно: нельзя получить x в знаменателе. Обойтись без функции f_2 тоже нельзя. В самом деле, производные функций f_1 и f_3 в точке $x = 1$ равны нулю, а производная функции $1/x$ в этой точке отлична от нуля. Доказать необходимость функции f_3 можно, используя комплексные числа: $f_1(i) = i + \frac{1}{i} = i - i = 0$, $f_2(i) = i^2 = -1$. А выразить при помощи операций задачи мнимое число $1/i = -i$ через вещественные числа нельзя.

4. Если провести через середины ребер правильного тетраэдра плоскости, параллельные граням, то тетраэдр будет разбит на четыре тетраэдра и правильный октаэдр (рис.5). Если через точки, делящие ребра тетраэдра на N равных частей, провести плоскости, параллельные граням, то тетраэдр будет разрезан на правильные тетраэдры и октаэдры (с ребром a, составляющим $1/N$ часть ребра исходного тетраэдра). В самом деле, рассмотрим слой между $(n-1)$-й и n-й плоскостями, параллельными (горизонтальному) основанию ($n \leq N$). Плоскости, параллельные наклонным граням, делят треугольник — сечение n-й плоскостью — на равные правильные треугольники со сторонами a. Раскрасим их в шахматном порядке так, что треугольники у вершин — черные (рис.6). Интересующий нас слой разбит на следующие многогранники: тетраэдры, стоящие на черных треугольниках; октаэдры, уложенные на белые треугольники (так же, как на рисунке 5); тетраэдры, уложенные вершиной вниз над каждой внутренней точкой треугольной сетки рисунка 6. Взяв $N > 100$, получим нужное разбиение. Его можно опи-

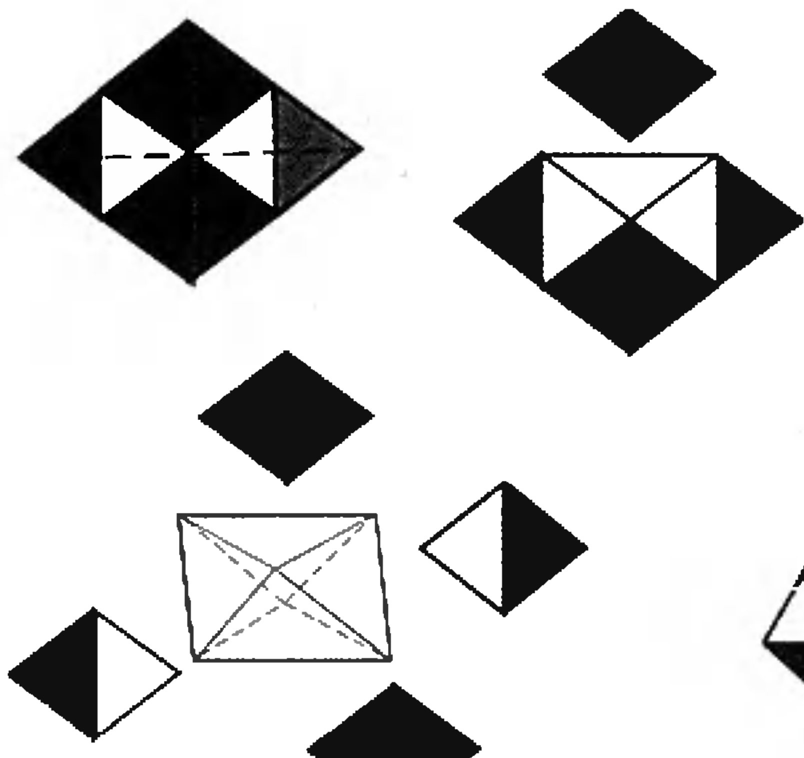


Рис. 5

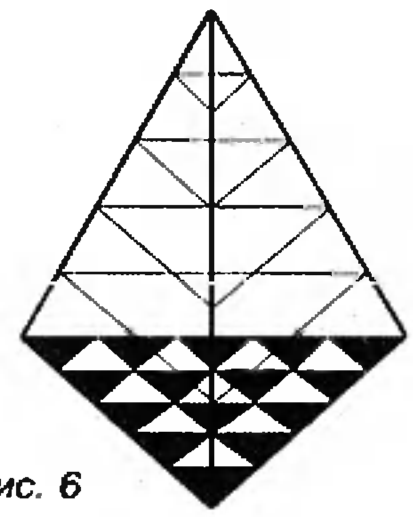


Рис. 6

сать и по-другому. Рассмотрим обычную кубическую решетку (точки с целыми координатами в пространстве), узлы которой раскрашены в шахматном порядке (точки с четной суммой координат — черные, точки с нечетной суммой — белые). В каждый единичный кубик впишем тетраэдр с вершинами в 4-х черных вершинах кубика. Тогда каждый белый узел будет центром правильного октаэдра, ограниченного 8-ю гранями тетраэдров из соседних кубиков. Выберем в пространстве куб, состоящий из N^3 единичных кубиков, у которого четыре вершины черные, а четыре другие — белые. Тогда тетраэдр с вершинами в 4 черных точках будет, как легко видеть, состоять из тетраэдров и октаэдров, на которые мы разбили пространство: все грани большого тетраэдра проходят только через черные узлы.

Избранные задачи отборочного тура

1. $p = 2n$.

Наборы гирь 1 г, 1 г, ..., 1 г и 2 г, 2 г, ..., 2 г по n штук в каждом различить нельзя. Значит, $p \le 2n$.

Докажем, что если сумма масс гирь меньше $2n$, то можно определить все массы. Если самая тяжелая гиря весит m граммов, то не менее $m - 1$ гири имеют массы 1 г: в противном случае общая масса была бы не меньше

$$(m-2)\cdot 1 + m + (n-m+1)\cdot 2 = 2n.$$

Имея $m - 1$ гирю по 1 г, можно взвесить все гири, массы которых меньше m г. Оставшиеся гири весят m г каждая.

2. Рассмотрим сумму всех положительных чисел на счетах у банкиров. После каждой операции эта сумма не увеличивается, и хоть раз (а именно, после первой же операции с ненулевым числом) она уменьшится.

3. Допустим, что ломаная, отличная от диаметра, делит площадь круга пополам. Можно считать, что ломаная имеет общую точку с окружностью (иначе сделаем параллельный перенос ломаной). Пусть A и B — концы этой ломаной (которые могут и совпадать). Рассмотрим ломаную с концами A' и B', центрально-симметричную (относительно центра круга) исходной ломаной. Эти ломаные обязаны пересечься (поскольку каждая отсекает половину площади круга). Возьмем ближайшую к точке A точку C их пересечения (расстояния отсчитываются вдоль ломаной от A к B). Центрально-симметричная точка C' также является точкой пересечения этих ломаных. Среди участков ломаных AC и $B'C$ выберем кратчайший (пусть это AC). Тогда ломаная $ACC'A'$ центрально-симметрична. Следовательно, она делит площадь круга пополам. С другой стороны, она короче (или равна) исходной ломаной. Но диаметр AA' еще короче (или равен) ломаной $ACC'A'$, причем равенство достигается только тогда, когда исходная ломаная — диаметр.

4. Докажем сначала **лемму**: ***существует бесконечно много простых чисел, не входящих в A_n.***

Доказательство. Множество таких простых чисел непусто: оно содержит любой простой делитель числа $n - 1$. Предположим, что множество конечно; обозначим произведение его элементов через P. Пусть p — простой делитель числа $nP - 1$, не имеющий вида $kn + 1$. Очевидно, P не делится на p. Лемма доказана.

Выберем в (бесконечном) множестве чисел леммы различные простые p_1 и p_2 такие, что $p_1 \equiv p_2 (\mathrm{mod}\, n)$. Из принципа Дирихле следует, что существуют натуральные числа q такие, что $p_1^q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$. Очевидно, одновременно и $p_2^q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$. Обозначим через m наименьшее из таких q; очевидно, $m > 1$. Рассмотрим число $a = (p_1^m)(p_2^m) = (p_1^{m-1}p_2)(p_2^{m-1}p_1)$. Вследствие минимальности m оба выписанных разложения числа a являются разложениями в произведения двух неприводимых в A_n чисел.

5. Утверждение задачи верно в точности при $4 \le n \le 6$. Если n-угольник не является выпуклым, то хотя бы одно из чисел $\sin\alpha_i$ отрицательно; значит, при $n = 4$ и при $n = 6$ утверждение задачи верно. Пусть $n = 5$, тогда $\sum_{i=1}^{5} \sin\alpha_i < 4$. Докажем, что $5\sin\frac{2\pi}{5} > 4$. Нетрудно вычислить $\sin\frac{2\pi}{5}$. Можно поступить еще проще: $\sin\frac{2\pi}{5} > \sin\frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5}$. (Или так: $\sin\frac{2\pi}{5} > \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{4}{5}$.) Следовательно, при $n = 5$ утверждение задачи тоже верно. Пусть $n \ge 7$. Рассмотрим многоугольники на рисунке 7. Приблизим углы B, D, E к прямым

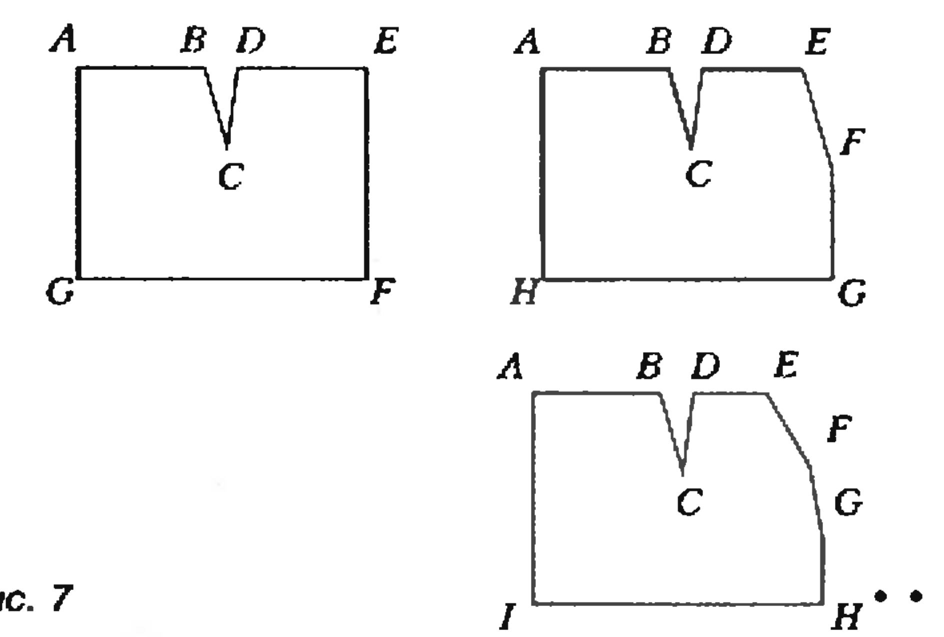


Рис. 7

углам. Ясно, что таким образом мы для любого значения $n \ge 7$ получим n-угольник такой, что число $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$ окажется сколь угодно близким к 6. Но при $4 \le n < 12$ имеем $n\sin\frac{2\pi}{n} < 6$. Действительно, функция $\frac{\sin x}{x}$ на полуинтервале $(0, \pi/2]$ монотонно убывает; поэтому $n\sin\frac{2\pi}{n} < 12\sin\frac{2\pi}{12} = 6$ (при $4 \le n < 12$).

Получили: при $7 \le n < 12$ найдется n-угольник такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i > n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Пусть $n \ge 10$. Рассмотрим многоугольники на рисунке 8. Приблизим углы, помеченные на рисунке 8 точками, к прямым углам. Ясно, что при этом число $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$ окажется

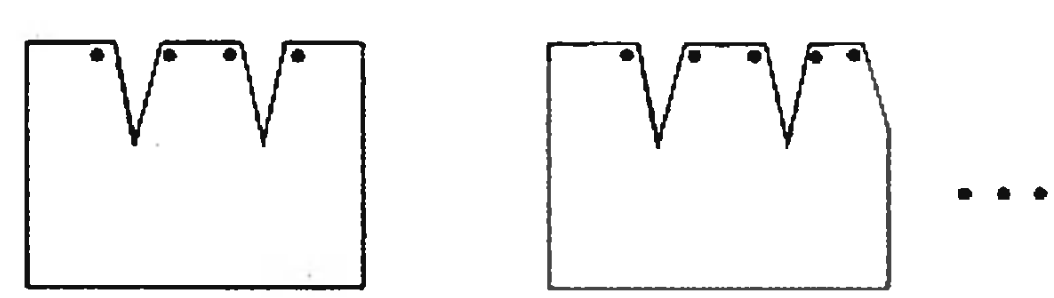


Рис. 8

сколь угодно близким к 8. Но $\sin\frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{n}$ и $n\sin\frac{2\pi}{n} < 2\pi < 7$. Значит, при $n \ge 10$ существует n-угольник такой, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i > n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

6. $\left[\frac{3n}{2}\right]-4$. Применим индукцию. База — случаи $n = 3$ и $n = 4$ — очевидна. Пусть n — некоторое натуральное число и пусть мы уже доказали формулу $\left[\frac{3k}{2}\right]-4$ для всех выпуклых k-угольников при $k < n$.

Рассмотрим n-угольник ($n > 4$). Пусть в нем проведены некоторые диагонали с соблюдением условия задачи. Докажем, что можно считать, что некоторая из проведенных диагоналей не пересечена ни одной из проведенных диагоналей («пересечена», как всюду в этой задаче, означает «пересечена во внутренней точке»). Возьмем любую из проведенных, диагоналей AB. Если AB пересечена некоторой проведенной диагональю CD, то можно без ограничения общности считать AC диагональю. Эта диагональ не может быть пересечена никакой проведенной диагональю. Добавив, если нужно, AC к системе диагоналей, завершаем доказательство. Если непересеченная диагональ рассекает n-угольник на r-угольник и s-угольник, то, во-первых, $r + s = n + 2$ (концы диагонали входят в обе части), во-вторых, число проведенных диагоналей не превосходит

$$\left(\left[\frac{3r}{2}\right]-4\right)+\left(\left[\frac{3s}{2}\right]-4\right)+1 \le \left[\frac{3(r+s)}{2}\right]-7 =$$

$$=\left[\frac{3(n+2)}{2}\right]-7=\left[\frac{3n}{2}\right]-4.$$

Оценка сверху доказана. А пример, когда эта оценка достигается, очевиден: можно по очереди отрезать (диагональю!) от n-угольника четырехугольники и проводить в каждом из них обе диагонали.

7. а) При помощи теоремы о вписанном угле доказывается для любого (а не только вписанного) четырехугольника следующий факт: *если E — точка пересечения прямых AB и CD, F — точка пересечения прямых AD и BC, то описанные окружности треугольников ABF, CDF, BEC и ADE проходят через одну общую точку* (рис.9).

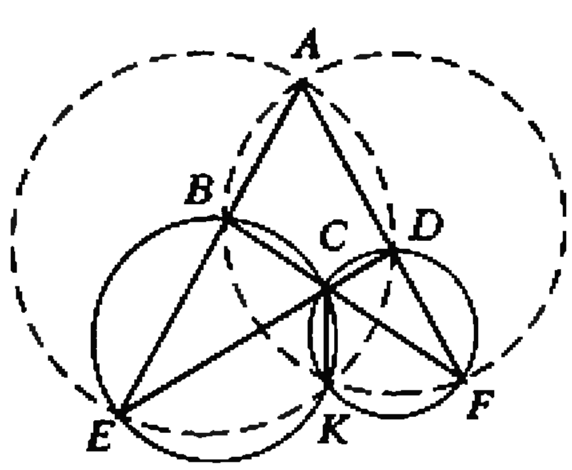


Рис. 9

Доказательство. Заметим, что описанные окружности треугольников BCE и CDF пересекаются в двух точках; обозначим через K точку пересечения этих окружностей, отличную от C. Докажем, что $ABKF$ (и, аналогично, $ADKE$) — вписанный; для этого вычислим сумму противоположных углов:

$$\angle BAF + \angle BKF = \angle EAD + \angle BKC + \angle CKF = \angle EAD + \angle BEC +$$

$$+180^\circ - \angle CDF = 180^\circ.$$

(Использованы равенство углов $\angle BKC = \angle BEC$, опирающихся на одну дугу, и теорема о внешнем угле треугольника ADE: $\angle CDF = \angle EAD + \angle BEC$.)

Для завершения доказательства пункта а) осталось показать, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром O, то K лежит на описанных окружностях треугольников BOD и AOC. Так как $\angle BCD > \angle BAD$, то точка O лежит внутри треугольника ABD. Следовательно, четырехугольник $BODK$ — выпуклый. Теперь посчитаем:

$$\angle BOD + \angle BKD = \angle BOD + \angle BKC + \angle CKD =$$

$$= \angle BOD + \angle BEC + \angle CFD = \breve{BC} + \breve{CD} + \frac{\breve{DA} - \breve{BC}}{2} + \frac{\breve{AB} - \breve{CD}}{2} =$$

$$= \frac{\breve{BC} + \breve{CD} + \breve{DA} + \breve{AB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ,$$

где все дуги, разумеется, являются дугами окружности с центром O.

б) Докажем, что K лежит на прямой EF:

$$\angle CKE + \angle CKF = 180^\circ - \angle CBE + 180^\circ - \angle CDF =$$

$$= \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Перпендикулярность прямых OK и EF следует из равенства углов $\angle BKO = \angle OKD$ (эти углы опираются на равные хорды BO и OD окружности, описанной вокруг четырехугольника $BODK$) и равенств $\angle BKE = \angle BCE = \angle DCF = \angle DKF$.

8. Не может. Пусть куб расположили так, что все его вершины оказались на поверхности другого куба и никакая его грань не параллельна никакой грани второго куба. Поскольку у куба восемь вершин и всего лишь шесть граней, то хотя бы одно ребро внутреннего куба должно оказаться на грани внешнего. Рассмотрим ортогональную проекцию внутреннего куба на эту грань. Получим прямоугольник, вписанный в квадрат. Если длина ребра внешнего куба равна 1, то длина диагонали грани внутреннего куба не может быть меньше 1. Значит, длина ребра внутреннего куба не меньше $1/\sqrt{2}$. Таким образом, в квадрат со стороной 1 вписан прямоугольник, одна сторона которого (проекция ребра внутреннего куба) не меньше $1/\sqrt{2}$. Другая сторона является проекцией грани внутреннего куба и должна быть больше стороны этой грани, т.е. ребра этого куба. Но в квадрат со стороной 1 можно лишь единственным образом вписать прямоугольник, обе стороны которого не меньше $1/\sqrt{2}$. В этом случае обе стороны в точности равны $1/\sqrt{2}$. Противоречие.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. $a_1 = -2$ м/с^2; $a_2 = -4$ м/с^2.

2. Нужно сначала взвесить рыбу на одной чашке весов, получив при этом значение m_1. Затем можно добавить в чашку с рыбой гирю известной массы m_2 и получить при взвешивании значение m_3. Теперь из условия равновесия весов легко найти истинное значение массы рыбы: $m = m_1 m_2/(m_3 - m_1)$.

3. $\mu \ge 0{,}56$.

4. $\tau_1 \approx 13{,}06$ мин; $\tau_2 \approx 10{,}35$ мин.

5. $v = \sqrt{gL/\cos\alpha}\,\sin^2\alpha$.

6. $a_2 = g\dfrac{m_2(m+m_1)}{m(4m_1+m_2)+m_1m_2}$.

7. $R_5 = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}\left(\dfrac{R_3}{R_3+R_4}-\alpha\right)$.

10 класс

1. $\dfrac{F_c}{mg} = \dfrac{\rho u^2\pi d^2}{8mg} \approx 70$.

2. $\dfrac{m}{M} = \dfrac{8\pi A}{gT^2(2N+1)}$, где $N = 0, 1, 2, \ldots$ — число периодов колебаний, прошедших между соударениями шарика и платформы.

3. $Q_1 = 24Q/23$.
4. Прямо пропорционально.
5. В наиболее простом случае шарик, отразившись от второго клина, возвращается в начальную точку удара о первый клин. При этом

$$H = l\frac{2\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)^2 \mathrm{tg}\,\alpha}{\left(3-\mathrm{tg}^2\alpha\right)\left(5\,\mathrm{tg}^2\alpha+1\right)} \text{ для } \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

6. $p \le 2F/\left(\pi d^2\right) \approx 1{,}3 \cdot 10^8$ Па.
7. $q_1 = -q_3 = 2\pi\varepsilon_0 r\mathcal{E}$, $q_2 = 0$.

11 класс

1. $l > \left(2\sqrt{3}-3\right)L \approx 0{,}46L$.
2. В диапазоне температур от −50 °С до −26 °С общий объем системы равен 4 *л* и давление растет пропорционально абсолютной температуре от $0{,}9p_0$ до p_0. В диапазоне от −26 °С до +35 °С давление не меняется и равно p_0, а объем увеличивается от 4 *л* до 5 *л*. Наконец, в диапазоне от +35 °С до +50 °С давление снова растет пропорционально температуре (но с меньшей скоростью) от p_0 до $1{,}04p_0$, объем остается равным 5 *л*.
3. $\omega = 2$ с$^{-1}$. *Указание.* Изменение частоты звука связано с эффектом Доплера.
4. $\mathcal{E} = \dfrac{U}{2n\left(1 \pm \sqrt{1-1/n}\right)}$, причем знак «+» соответствует случаю, когда ротор мотора был соединен с нагрузкой до подключения к сети, а знак «−» — случаю, когда двигатель нагрузили механически лишь после того, как его якорь раскрутился в режиме холостого хода.
5. Выберем начало оси координат Z в центре окружности, по дуге которой распространяется луч света. Тогда $n(z) = \alpha/z$, где α = const.

ПЕРВАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА АСТРОНОМИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

9—10 классы

1. Для наблюдения в недоступных с Земли диапазонах длин волн; для получения высокого углового разрешения; для улучшения отношения сигнал/шум; для удлинения непрерывной экспозиции.
2. Изображения мухи наблюдатель не увидит, но если муха занимает приличную часть линзы, то изображение удаленных объектов будет немного слабее.
3. Метеориты, попадающие на «утреннюю» половину земной атмосферы, встречаются с ней лоб в лоб, в то время как вечером в атмосферу попадают лишь частицы, догоняющие Землю. В результате их скорость по отношению к атмосфере во втором случае ниже, и вспыхивают они слабее.
4. В знаке Козерога.
5. Примерно 5 миллионов фотонов.
6. Нельзя, поскольку данная звезда светит существенно слабее порога видимости невооруженным глазом.
7. Увы, солнечные затмения в период около полнолуния не наблюдаются.
8. Да, смогут. При этом вездеход должен двигаться в сторону, противоположную собственному движению астероида.

11 класс (12)

1. Предельное угловое разрешение телескопа, обусловленное дифракцией, зависит от длины волны света: минимальное расстояние между разрешаемыми звездами обратно пропорционально длине волны.
2. Оптикам мешает рассеянный в земной атмосфере солнечный свет, а радиоастрономам нет.
3. Если у наземного телескопа диаметр больше, чем у космического, то его лучше использовать для спектральных наблюдений относительно ярких объектов. Если необходим непрерывный мониторинг объекта, то на земле это можно делать 8—10 часов, а в космосе — минут 40—50.
4. Поскольку угловое разрешение космического телескопа выше, свет слабых точечных объектов концентрируется в пятнышко меньшего размера, которое легче выделить на фоне неба. К тому же сам фон неба на околоземной орбите приблизительно вдвое меньше, поскольку нет свечения атмосферы. Третья причина — поглощение света звезд в атмосфере.
6. 2,7 пк; через 150 тыс. лет; $-0{,}49^m$. 7. $18{,}5^m$.

ФОКУС С ШАРИКОМ

(см. 4-ю страницу обложки)

Когда мы прижали стаканчики к слабо надутому шарику, воздух в стаканчиках оказался заперт резиновой пленкой. По мере надувания шарика кривизна его поверхности уменьшается, и объем воздуха в стаканчике увеличивается. Это приводит к уменьшению давления в стаканчике по сравнению с атмосферным.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, И.А.Тарабанова, Е.А.Трофимова, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

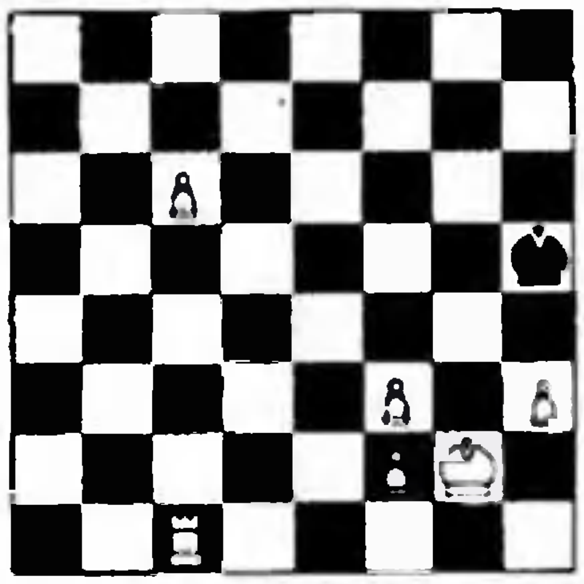
Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №921

СПЛОШНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Шахматы, по сути, — сплошная геометрия, и сегодня мы в очередной раз убедимся в этом. Одним из наиболее распространенных тактических приемов, особенно в эндшпиле, является передача хода противнику. Часто сторона, владеющая инициативой, добивается цели, если одна из ее фигур пробегает треугольный маршрут. Как вы знаете, в пешечных окончаниях эта идея встречается довольно часто, поэтому обратимся к другим примерам.

Марич — Петрович
Югославия, 1983

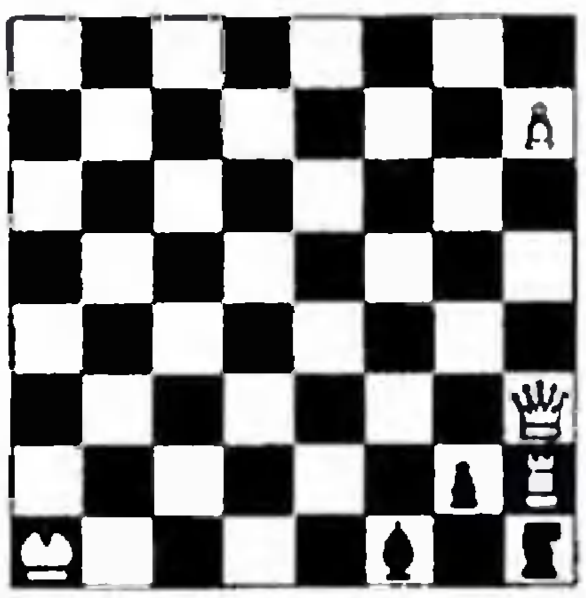


Кажется, белые не могут усилить свою позицию, и все же они красиво выигрывают. **1. h4! g4 2. fg+ Кр:g4 3. f3 + Кр:h4 4. Лс5!** Теперь плохо 4...h5 из-за 5. Крf2, и черным остается только сдаться. Но ведь черная ладья может объявить шах и вернуться обратно на с7. Вот тут-то белый король и нарисует необходимый треугольник f1-f2-g2...

4...Лg7+ 5. Крf1! Лс7 6. Крf2 h5 7. Крg2. После 7...Лg7+ 8. **Крf1** черные в отчаянии сыграли 8...Лg2!? в надежде на 9. Кр:g2? пат, но **9. Л:b5+** вынудило их сложить оружие.

Продемонстрированный треугольный маневр широко используется и в этюдах; вот классический пример.

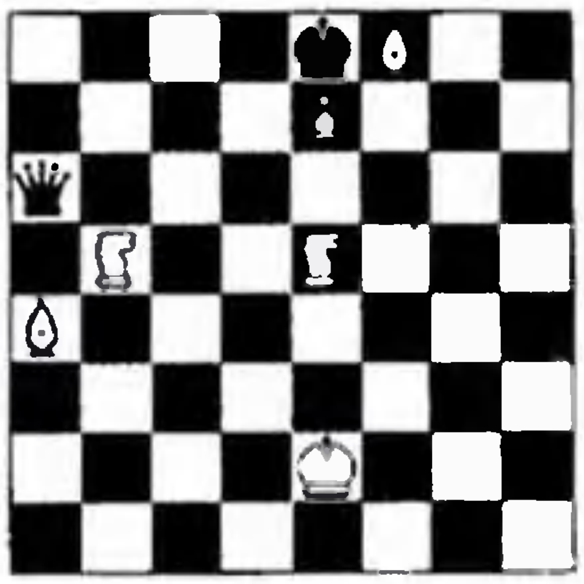
В.Чеховер, 1937
Выигрыш



Ферзь и ладья прикованы к своим местам, и все решает противостояние белого короля и черного коня. Непосредственная ловля коня не приводит к успеху: 1. Крb2 Кg6 2. Крс3 Кh8 3. Крd4 Кf7, и король остановлен: 4. Крс5 Кh8 5. Крd6 Кg6! Чтобы сбить с темпа неприятельского коня, белому королю надо разок ступить на белое поле, но нельзя допустить выпада слона f1 с шахом. Избежать его можно только на одном белом поле доски — а8. Теперь план ясен: **1. Крb2 Кg6 2. Крa3 Кh8 3. Крb4 Кg6 4. Крс5 Кh8 5. Крb6 Кg6 6. Крa7! Кg8 7. Крa8!! Кg6 8. Крb8! Кh8 9. Крс7 Кf7!** Временное препятствие на пути короля. **10. Крb6 Кh8 11. Крс5 Кg6 12. Крб 12. Крd4** и благодаря треугольному маневру в левом верхнем углу доски белый король прорывается в желанный угол — **12...Кh8 13. Кре5** и т.д.

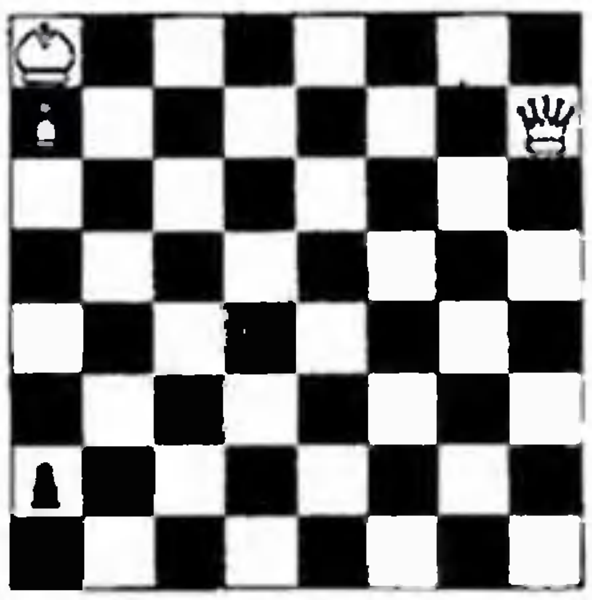
Можно было бы привести множество практических примеров и этюдов на данную тему, они не раз появлялись на шахматной страничке. Но самое интересное, что подобные треугольники встречаются и в задачной композиции. Ей и посвящены все дальнейшие примеры.

Ф.Закман, 1912
Мат в 4 хода



Конь b5 готов объявить мат, но как заставить черного ферзя покинуть свое сторожевое место на а6? **1. Кре1! Фа5+ 2. Крf1! Фа6 3. Кре2!** Треугольник e1-f1-e2 построен, цель достигнута. Следующим ходом белые ставят мат.

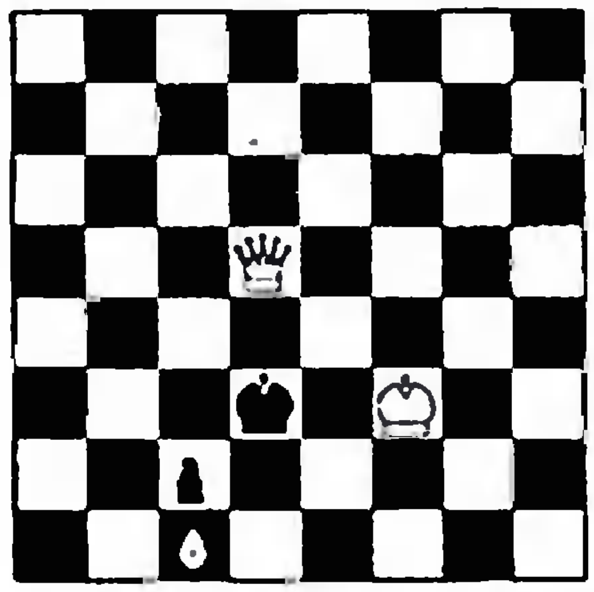
Я.Клинг, 1847
Мат в 10 ходов



1. Фh1+ Лb1 2. Фh8+ Лb2 3. Фd4! d5 4. Фg1+ Лb1 5. Фg7+ d4! 6. Ф:d4+ Лb2 7. Фg1+ Лb1 8. Фg7+ Лb2 9. Фd4! Крb1 10. Фd1×. Здесь дело решили несколько треугольников, которые «разыграл» белый ферзь.

Меньше размах треугольника в следующей задаче, где темп также выигрывает ферзь.

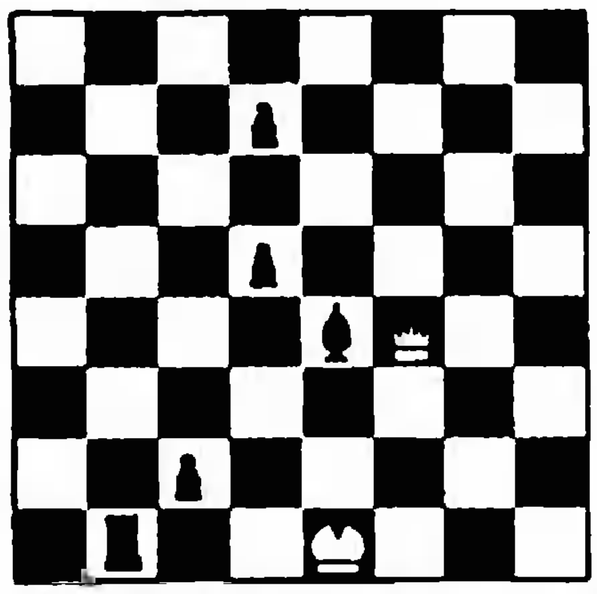
Ф.Закман, 1914
Мат в 5 ходов



1. Фс5 Лb1 (или другое поле по линии «b») **2. Фс6 Лb6** (2...Л:с1 3. Фb5+ Крd2 4. Фс2×) **3. Фd5! Лb1 4. Фе6** и **5. Фе2×, 3...Лс6! 4. Фb5+ Лс4 5. Фf5×.**

В двух последних примерах треугольные маршруты ферзя позволили ему справиться с ладьей; а вот задача, где ферзь перехитрил слона.

А.Кремер, 1948
Мат в 5 ходов



1. Фg5! Сh2 2. Фf5!, угрожая 3. Фd3, 4. Ф:е3×, а после 2...Се4 3. **Фf4!** возникает начальная позиция. 3...С — любой ход, 4. Ф:d4 и 5. Ф:е3×. Или 1...Сb7 2. **Фg1! Сd3 3. Фg7!** и 4. Ф:d4. Последний вариант, кстати, объясняет выбор первого хода белых.

В следующей миниатюре (на доске всего шесть фигур) треугольный маршрут позволяет ферзю выиграть темп в противоборстве с конем.

Д.Диллман, 1937. Белые: Крh2, Фg1; черные: Крh4, Ке4, пп.h3,h5. Мат в 4 хода. Решение. **1. Фg7! Кg5 2. Фd4+ Ке4 3. Фg1!**, и мат неизбежен.

Осталось сказать, что до сих пор не разработаны подобные поединки ладьи и слона, наоборот, слона и ладьи, ладьи и ферзя, короля и слона. Так что в теме «треугольника» еще немало белых пятен.

Е.Гик

Индекс 70465

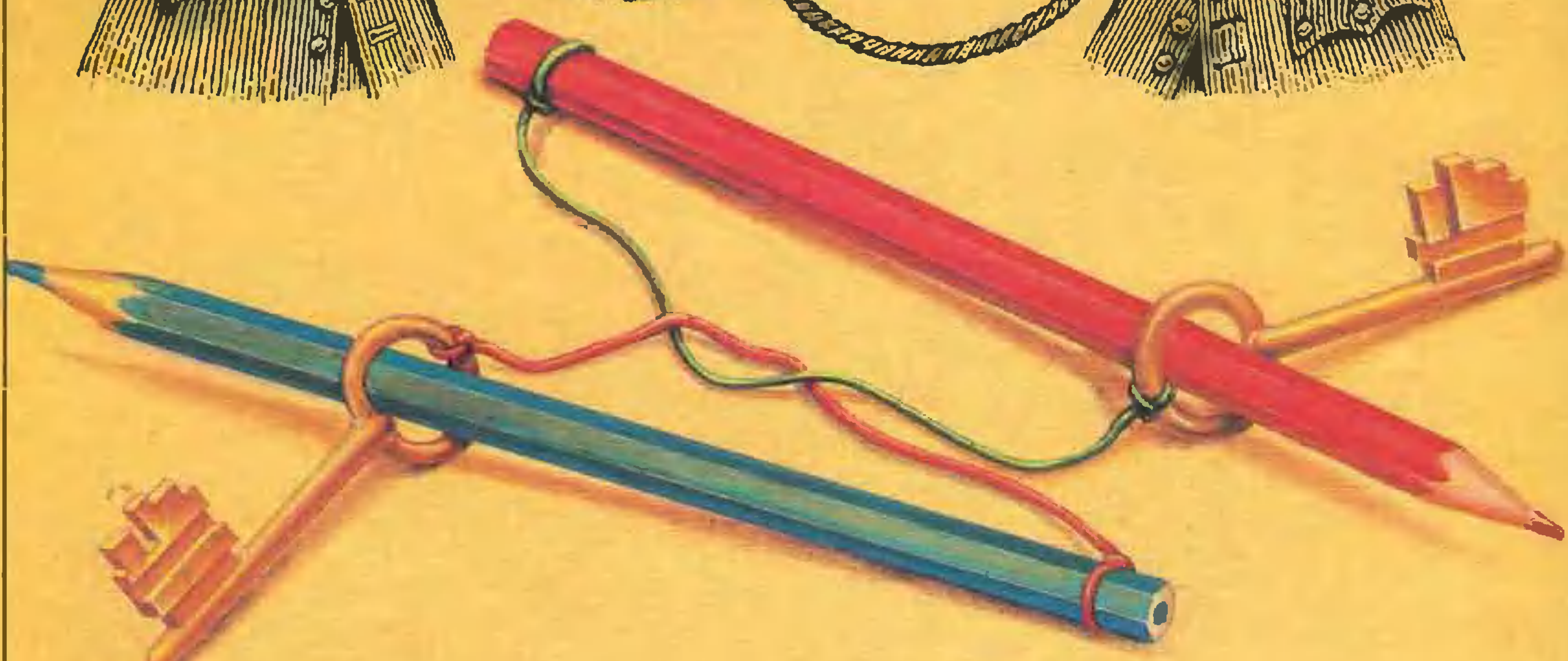
ФОКУС С ШАРИКОМ

В предыдущих номерах журнала мы играли в игрушки, которые иллюстрировали действие законов механики. Теперь перейдем к изучению молекулярной физики и термодинамики.

Начнем с очень простой игрушки, посвященной газовым законам. Для ее изготовления вам понадобятся всего три предмета — воздушный шарик (лучше круглый) и два легких пластиковых стаканчика. Собственно, изготавливать ничего и не надо — просто начните надувать воздушный шарик. Когда шарик уже примет круглую форму, но еще не будет накачан достаточно сильно, прижмите к нему с двух сторон пластиковые стаканчики. Продолжайте надувать шарик, и через некоторое время отпустите стаканчики. Если вы сделали все правильно, то увидите, что стаканчики не падают, а держатся — как будто чем-то приклеенные.

Надеемся, вы уже готовы объяснить, какой же "клей" удерживает стаканчики. Если не совсем уверены в своем объяснении — загляните в "Ответы"

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



Вы, вероятно, удивитесь, узнав, что многие головоломки были придуманы еще в глубокой древности. К сожалению, их названия, в отличие от кубика Рубика, ничего не говорят об их изобретателях. Более того, имена многих, возможно, наиболее древних головоломок состоят только из одного слова — "головоломка".

Показанные на нашем рисунке сцепленные карандаши — это модель головоломки из древних времен. Из тех времен, когда человек со связанными руками был привычен и даже необходим по законам жизни. Рисунок, помещенный вверху, взят из книги, напечатанной в Англии в средние века. Спрашивается, как расцепить двух людей, не развязывая им рук.

Задача нашей головоломки в том, чтобы отцепить карандаши друг от друга, не развязывая веревочек. Попробуйте ее решить хотя бы для того, чтобы проверить, умнее ли вы древних людей. При изготовлении игрушки имейте в виду, что длина веревочки должна быть меньше длины карандаша.

А. Калинин